

**Exercice 1** 1. Donner, dans  $\mathbb{R}^3$ , un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.

2. Donner, dans  $\mathbb{R}^3$ , un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

**Exercice 2** Dans  $\mathbb{R}^4$  on considère l'ensemble  $E$  des vecteurs  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  vérifiant  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ . L'ensemble  $E$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  ? Si oui, en donner une base.

**Exercice 3** Dans l'espace  $\mathbb{R}^4$ , on se donne cinq vecteurs :  $V_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $V_2 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $V_3 = (3, 1, 4, 2)$ ,  $V_4 = (10, 4, 13, 7)$ ,  $V_5 = (1, 7, 8, 14)$ . Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

**Exercice 4** Dans l'espace  $\mathbb{R}^4$ , on se donne cinq vecteurs :  $V_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $V_2 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $V_3 = (3, 1, 4, 2)$ ,  $V_4 = (10, 4, 13, 7)$ ,  $V_5 = (1, 7, 8, 14)$ . Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

**Exercice 5** On suppose que  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  sont des vecteurs indépendants de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Les vecteurs  $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_n - v_1$  sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs  $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_n + v_1$  sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs  $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n$  sont-ils linéairement indépendants ?

**Exercice 6** Peut-on déterminer des réels  $x, y$  pour que le vecteur  $v = (-2, x, y, 3)$  appartienne au s.e.v. engendré dans  $\mathbb{R}^4$  par le système  $(e_1, e_2)$  où  $e_1 = (1, -1, 1, 2)$  et  $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$  ?

**Exercice 7** Soient  $\vec{e}_1(0, 1, -2, 1), \vec{e}_2(1, 0, 2, -1), \vec{e}_3(3, 2, 2, -1), \vec{e}_4(0, 0, 1, 0)$  et  $\vec{e}_5(0, 0, 0, 1)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ . Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1.  $\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$ .
2.  $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \cap \text{Vect}\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ .
3.  $\dim(\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \cap \text{Vect}\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}) = 1$ .

**Exercice 8** Montrer que les vecteurs  $x_1 = (0, 1, 1)$ ,  $x_2 = (1, 0, 1)$  et  $x_3 = (1, 1, 0)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Trouver dans cette base les composantes du vecteur  $x = (1, 1, 1)$ .

**Exercice 9** Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère les familles de vecteurs suivantes

- $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 2, -1), v_3 = (1, 0, -2, 3), v_4 = (2, 1, 0, -1), v_5 = (4, 3, 2, 1)$ .
- $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (0, 1, 2, -1), v_3 = (3, 4, 5, 16)$ .
- $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (0, 1, 2, -1), v_3 = (2, 1, 0, 11), v_4 = (3, 4, 5, 14)$ .

Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de  $\mathbb{R}^4$ . Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice ? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

**Exercice 10** Déterminer pour quelles valeurs de  $t \in \mathbb{R}$  les vecteurs  $(1, 0, t)$ ,  $(1, 1, t)$ ,  $(t, 0, 1)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 11** Déterminer suivant la valeur de  $x \in \mathbb{R}$  le rang de la famille de vecteurs  $e_1 = (1, x, -1), e_2 = (x, 1, x), e_3 = (-1, x, 1)$ .

**Exercice 12** Soit  $(\Sigma)$  le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de  $(\Sigma)$  forme un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^4$ . Déterminer la dimension et une base de  $F$ .