Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

On veut montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$,

1. Montrer que: $\exists B > 0 \mid \forall x \geqslant B, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x+n) - f(x)| \leqslant n\dfrac{\varepsilon}{2}$.

   On fixe désormais un tel B.
2. Justifier l'existence $M = \displaystyle\sup_{[B,B+1]} |f(x)|$.
3. Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, x - E(x-B) \in [B, B+1[$.
4. Montrer que: $\forall x \geqslant B, |f(x)| \leqslant M + (x-B)\dfrac{\varepsilon}{2}$.
5. Montrer que: $\exists B' > 0 \mid \forall x \geqslant B', M - B\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant x\dfrac{\varepsilon}{2}$.

   On fixe désormais un tel B'.
6. Déduire de tout ce qui précède que: $\forall x \geqslant \max(B, B'), \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$.
7. Conclure.
8. APPLICATION: Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* : f(xy) = f(x) + f(y).$$

   (a) Montrer que $f(1) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} xf(x) = 0$.

   REMARQUE: Celà montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que

$$f(0) = 1, \lim_{-\infty} f = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} f = 0.$$

Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\begin{cases} f(x) = |x|\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue, minimale en 0, mais pour tout $\varepsilon > 0$, $f_{|[0,\varepsilon]}$ n'est pas monotone.

Exercice 5 Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : h(x) = \max(f(x), g(x))$. Montrer que h est continue.

Exercice 6 Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n de:

1. $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ $n = 2$ $a = 0$.
2. $\ln\left(\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right)$ $n = 3$ $a = 0$.
3. $\ln(\sin x)$ $n = 3$ $a = \frac{\pi}{4}$.
4. $\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}$ $n = 4$ $a = +\infty$.
5. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $n = 3$ $a = 0$.
6. $x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2})$ $n = 2$ $a = +\infty$. $n = 2$ $a = 0$.

Exercice 7 Donner un développements limité en 0 à l'ordre 10 de:

$$x \longmapsto \int_0^x \cos t^2 dt.$$

Exercice 8 Donner le DA à l'ordre 2 en $+\infty$ de $x \to \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}} e^{\frac{x}{x-1}}$.