

**EXERCICE 1** Dans cet exercice  $E$  désigne le  $\mathbb{R}$  - espace vectoriel  $\mathbb{R}_4[X]$  des polynômes à coefficients réels de degrés  $\leq 4$ . On note  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  les trois formes linéaires définies sur  $E$  par :

$$\forall P \in E : \varphi_1(P) = P(1), \quad \varphi_2(P) = P'(1) \quad \text{et} \quad \varphi_3(P) = P''(1).$$

1. Montrer que la famille  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  est libre.
2. Soit  $G = \ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_2) \cap \ker(\varphi_3)$ . Donner la dimension de  $G$  en déterminer une base.
3. On pose  $K = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid (X^2 + 1) \text{ divise } P\}$ . Montrer que  $K$  est un sous espace vectoriel de  $E$  et que  $E = G \oplus K$ .

**EXERCICE 2** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^2 \neq 0$  et  $f^3 = 0$ . Soit  $x_0 \in E/f^2(x_0) \neq 0$ .

4. Montrer que  $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$  est une base.
5. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  de base  $(id, f, f^2)$ .

## Problème

Dans tout le problème  $E$  désigne l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :

$$f(e_1) = 3e_1 + e_2 \quad f(e_2) = -2e_1 \quad f(e_3) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

### Partie I

6. Montrer que  $f$  est bijectif.
7. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on note  $f_\lambda$  l'endomorphisme  $f - \lambda Id_E$ . Etudier selon  $\lambda \in \mathbb{R}$  le rang de  $f_\lambda$ .
8. On pose  $E_1 = \ker(f - Id_E)$  et  $E_2 = \ker(f - 2Id_E)$ . Déterminer une base et la dimension de chacun des sous espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$ .
9. Est ce que  $E = E_1 \oplus E_2$  ?

10. Déterminer le vecteur  $u_1$  de  $E_1$  dont la première composante vaut 1 et le vecteur  $u_2$  de  $E_2$  dont la deuxième composante vaut 1.

11. Soit  $u_3 = (1, 1, 1)$ . Montrer que  $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$  est base de  $E$ .

12. Ecrire les vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

13. Ecrire  $f(u_3)$  dans la base  $\mathcal{C}$ . Et montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  il existe  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  tel que  $f^n(u_3) = \alpha_n u_2 + 2^n u_3$ . On donnera  $\alpha_1$  ainsi qu'une relation entre  $\alpha_{n+1}$  et  $\alpha_n$ .

14. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \alpha_n = n2^{n-1}$ .

15. Donner alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les expressions des vecteurs  $f^n(e_1)$ ,  $f^n(e_2)$  et  $f^n(e_3)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

### Partie II

On note  $\mathcal{C}(f)$  l'ensemble  $\{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ .

16. Montrer que  $\mathcal{C}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .

17. Montrer que pour tout  $g \in \mathcal{C}(f)$ ,  $g(E_1) \subset E_1$  et  $g(E_2) \subset E_2$ .

18. Pour  $g$  appartenant  $\mathcal{C}(f)$ , montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(a)  $g \in \mathcal{C}(f)$ .

(b) Il existe des réels  $a, b, c$  tels que

$$g(u_1) = au_1 \quad g(u_2) = bu_2 \quad g(u_3) = cu_2 + bu_3$$

19. Soit donc  $g \in \mathcal{C}(f)$  et des réels  $a, b, c$  vérifiant la condition (b) ci-dessus. Donner les expressions des vecteurs  $g(e_1)$ ,  $g(e_2)$  et  $g(e_3)$  dans la base  $\mathcal{B}$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .

20. Déterminer alors une base de  $\mathcal{C}(f)$  ainsi que sa dimension.