

Exercice 1 Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
- $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \mapsto \{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\}$. $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(3/4)$.
- $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x + 5y$. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, y)$. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$.
- $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto f'(x) + f(x) \cdot \sin x\}$.

Exercice 2 Soient f et g , applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , définies par $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \Re(z)$. Montrer que f et g sont linéaires sur \mathbb{C} en tant que \mathbb{R} -e.v., et non linéaires sur \mathbb{C} en tant que \mathbb{C} -e.v.

Exercice 3 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n , on définit l'application $f : F \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

- Montrer que f est linéaire.
- Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 4 Soit E, F, G trois espaces vectoriels, f et g deux applications linéaires $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$; montrer que :

$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g \cap \text{Im } f) = f^{-1}(\ker g).$$

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans E . Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

- Si e_1, e_2, \dots, e_p est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
- Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de e_1, e_2, \dots, e_p .
- Si e_1, e_2, \dots, e_p est génératrice, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$.
- Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est génératrice, il en est de même de e_1, e_2, \dots, e_p .
- Si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ est une base de $\text{Im } u$, alors e_1, e_2, \dots, e_p est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\ker u$.

Exercice 6 Soient E un espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans E . On suppose que $\ker(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi) = \{0\}$. Montrer que, si $x \notin \ker(\varphi)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N} : \varphi^n(x) \neq 0$.

Exercice 7 Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

Exercice 8 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 9 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$.

Exercice 10 Soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$, tels que $u^2 = u$ et $vu = 0$. Montrer que

$$\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) + \text{Im } v.$$

Problème

On considère les ensembles F et G suivants:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \text{ et } z = 0\}$$

Question 1 Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

Question 2 Donner une base de F et une base G et montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Question 3 Soit p la projection sur F parallèlement à G . Donner pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ l'expression de $p(u)$ en fonction de x, y et z .

Soit $q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par: $(x, y, z) \mapsto (-x - 2y, x + 2y, z)$

Question 4 Montrer que q est un projecteur et que $\text{Im}(q) = F$.

Question 5 En déduire que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

Question 6 On pose $r = p + q$. Est ce que r est un projecteur ?

Question 7 Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, calculer r^n en fonction de n et r .

Question 8 On note $Id_{\mathbb{R}^3}$ l'application identité de \mathbb{R}^3 . Montrer que:

$$\text{Im}(r - 2Id_{\mathbb{R}^3}) \subset \ker(r) \quad \text{et} \quad \text{Im}(r) \subset \ker(r - 2Id_{\mathbb{R}^3})$$

Question 9 Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(r - 2Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(r)$.