Problème

Dans tout le problème, on considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

Partie 1

1. (a) Etudier la parité de φ.
   (b) Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$ et préciser ses branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Donner l'allure de la courbe représentative de φ.
   (d) Justifier que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.
   (e) Observer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $\varphi'(x) = 1 - [\varphi(x)]^2$.
   (f) Montrer que $\varphi^{-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et exprimer simplement sa dérivée.

Partie 2

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0 vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(2x) = 2f(x).$$

On considère une éventuelle solution f.

1. Calculer $f(0)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$
   (a) Montrer que (u_n) converge et exprimer sa limite.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Conclure qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha x$.

Partie 3

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0 vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}.$$

1. Montrer que φ est solution du problème posé.
2. On considère dans cette question f une solution du problème posé.
   (a) Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
   (b) Montrer que $-f$ est aussi solution.
   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   Indication : on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
3. On suppose dans cette question que f est solution du problème posé et que $f(0) = 1$.
   On considère $x \in \mathbb{R}$ et l'on définit la suite (v_n) par $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite.
   (b) Etablir une relation entre v_n et v_{n+1}.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \lneqq v_n \leqslant 1$.
   (d) Etudier la monotonie de la suite (v_n) et en déduire que celle-ci est constante égale à 1.
   (e) Déduire la valeur de la fonction f dans ce cas.
   (f) Que peut-on dire si l'hypothèse «$f(0) = 1$» et remplacée par « $f(0) = -1$»?
4. On suppose dans cette question que f est solution du problème posé et que $f(0) = 0$.
   (a) En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que ci-dessus, montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 1$ et $f(x) \neq -1$.
   (b) On introduit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \varphi^{-1}(f(x))$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : g(2x) = 2g(x)$ et que g est dérivable en 0.
   (c) En déduire une expression de $f(x)$ dépendant d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.