

Exercice 1 À quelle condition sur f et g a-t-on $e^f \underset{a}{\sim} e^g$?

Exercice 2 Soient f et g équivalentes au voisinage de a et strictement positives. Montrer que si f admet en a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ différente de 1 alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

Exercice 3 Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que pour tout x et x' ($x \neq x'$) de $[a, b]$ on ait : $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[a, b]$ (On pourra introduire la fonction: $x \mapsto g(x) = f(x) - x$).

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 5 Soient f et g continues sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1] f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1] f(x) + m < g(x)$.

Exercice 6 Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : h(x) = \max(f(x), g(x))$. Montrer que h est continue.

Exercice 7 Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) < g(x).$$

Montrer que $f \leq g$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue dont la restriction à \mathbb{Q} est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

on pose $g(x) = f(x) - f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R} :$

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) + g\left(\frac{x-y}{2}\right) = g(x).$$

2. En déduire que $\forall x, y \in \mathbb{R} : g(x+y) = g(x) + g(y)$.

3. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = ax$.

4. En déduire la forme de f .

Exercice 10 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que: $\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f \circ f(x) = x$.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\begin{cases} f(x) = |x| \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue, minimale en 0, mais pour tout $\varepsilon > 0, f|_{[0, \varepsilon]}$ n'est pas monotone.

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

On note $\mathcal{E} = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissantes tq } g \leq f\}$, et pour $x \in \mathbb{R} :$

$$\tilde{f}(x) = \sup \{g(x) \text{ tq } g \in \mathcal{E}\}.$$

1. Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{E}$.
2. On suppose f continue. Montrer que \tilde{f} est aussi continue. (ind: s'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \tilde{f}(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} \tilde{f}(x)$, construire une fonction de \mathcal{E} supérieure à \tilde{f})

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $T > 0$. On suppose que f est T -périodique.

1. Si f possède une limite en $+\infty$, montrer que f est constante.
2. Si f est continue non constante, montrer que f a une plus petite période.
3. Si f est continue, montrer que f est bornée et atteint ses bornes.