

Problème 1

On rappelle que la fonction $\ln : (\mathbb{R}_+^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$, $x \longmapsto \ln x$ est un isomorphisme de groupe. On rappelle aussi que si H est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ tel que l'ensemble $H \cap \mathbb{R}_+^*$ admet un minimum $\alpha > 0$ alors $H = \alpha\mathbb{Z}$. Dans tout le problème on note $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 - 2y^2 = 1\}$.

Question 1 Vérifier que \mathcal{S} est non vide et que si $(x, y) \in \mathcal{S}$ alors $(-x, y)$, $(-x, -y)$ et $(x, -y)$ sont aussi des éléments de \mathcal{S} .

Question 2 Montrer que l'ensemble $G = \{x + y\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^* \mid (x, y) \in \mathcal{S}\}$ est un sous groupe de (\mathbb{R}_+^*, \times) .

Question 3 Pour x, y dans \mathbb{N} tels que $(x, y) \in \mathcal{S}$, montrer les inégalités:

$$0 < x - y\sqrt{2} \leq 1 \leq x + y\sqrt{2} \text{ et } -x - y\sqrt{2} \leq -1 \leq -x + y\sqrt{2} < 0.$$

En déduire que l'ensemble $G \cap]1, +\infty[$ admet $z = 3 + 2\sqrt{2}$ comme plus petit élément.

Question 4 On note $H = \ln G = \{\ln t \mid t \in G\}$.

(a) Justifier le fait que H est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $H = \alpha\mathbb{Z}$.

(c) En déduire que $G = \{(3 + 2\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Question 5 Soit un entier $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer qu'il existe un couple unique $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2}$.

(b) En déduire que $(3 + 2\sqrt{2})^{-n} = x_n - y_n\sqrt{2}$.

(c) Exprimer x_n et y_n en fonction de n .

(d) Calculer (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) .

Question 6 En déduire toutes les solutions entières de l'équation: $x^2 - 2y^2 = 1$.

problème 2

Soit E un ensemble fini non vide. Pour tout entier k , on dit que $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ est une partition de E en k classes si:

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = E; \quad \forall i, A_i \neq \emptyset; \quad \forall i \neq j: A_i \cap A_j = \emptyset.$$

On suppose que $\text{card}(E) = n$. On note $r(n)$ le nombre de partitions de E . On pose $r(0) = 1$.

Pour tout $k \geq 1$, on note $r(n, k)$ le nombre de partitions de E en k classes.

Question 7 Montrer que: $\forall k, n \in \mathbb{N}^*, k > n \Rightarrow r(n, k) = 0$.

Question 8 Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, r(n) = \sum_{k=1}^n r(n, k)$.

Question 9 Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, r(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r(k)$. (indication: E de cardinal $n+1$, fixer un élément a de E . Pour tout $A \in \mathcal{P}(E \setminus \{a\})$, remarquer que toute partition de A détermine une partition de E en lui ajoutant $\{a\}$.)

Question 10 Calculer, à l'aide de la question 3, $r(n)$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Question 11 Montrer par récurrence sur n que: $\forall n \geq 5, r(n) \geq 2^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, r(n) \leq n^n$.

Question 12 Dans cette question on note S_n^k le nombre de surjections de $[[1, n]]$ sur $[[1, k]]$. Montrer que: $\forall k, n \in \mathbb{N}^*, S_n^k = k!r(n, k)$.

On suppose dans la suite que $\text{card}(E) = 2m$, avec $m \geq 1$. Et on note a_m le nombre de partitions de E en m classes qui sont des paires.

Question 13 Déterminer a_1, a_2, a_3 . Par convention on pose $a_0 = 1$.

Question 14 Montrer que: $\forall m \in \mathbb{N}^*, a_m = (2m-1)a_{m-1}$.

Question 15 En déduire, par récurrence sur m , que :

$$a_m = \frac{(2m)!}{2^m m!}.$$