

Exercice 1 Soient les quatre fonctions de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R}^*

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = -x \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montre que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi \circ .

Exercice 2 Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes ?

- \mathbb{R}_+ pour la multiplication usuelle;
- $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ pour la loi de composition des applications.

Exercice 3 Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G . Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 4 Déterminer le sous-groupe de \mathbb{Z} engendré par les entiers 24, 36 et -54 .

Exercice 5 Soit G un groupe. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

- G est abélien.
- Pour tout $a, b \in G$, on a: $(ab)^2 = a^2b^2$.
- Pour tout $a, b \in G$, on a: $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
- L'application f de G dans G définie par $f(x) = x^{-1}$ est un automorphisme.

Exercice 6 Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (resp. de (\mathbb{R}^*, \times)) contenant 1 ? Contenant 2 ?

Exercice 7 Soit G un groupe. Montrer que l'ensemble $Aut(G)$ des automorphismes de G est un groupe pour la loi de composition. Soit H un sous-groupe de $Aut(G)$, et $\pi : G \rightarrow \wp(G)$ définie par : $\pi(x) = \{f(x) | f \in H\}$. Montrer que $\pi(G)$ est une partition de G .

Exercice 8 Décrire tous les homomorphismes de groupes de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} . Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

Exercice 9 Soit le groupe $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

- Déterminer le sous-groupe H de G engendré par $\bar{6}$ et $\bar{8}$ et déterminer son ordre.
- Caractériser les générateurs de G .
- On note K l'ensemble de tous les générateurs de G . Montrer que (K, \times) est un groupe.

Exercice 10 Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?

Exercice 11 Les sous-groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 12 Les sous-groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 13 Montrer que les groupes multiplicatifs $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 14 Soient $a, b \in \mathbb{C}$. L'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto iz - \bar{z}$ est-elle un (endo)morphisme...

- ...du groupe \mathbb{C} ?
- ...de l'anneau \mathbb{C} ?

Exercice 15 Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $End(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G sur lequel on définit la loi $+$ par $f + g :$

$$\begin{cases} G \rightarrow G \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases} .$$

Montrer que $(End(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 16 Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

- Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour les lois usuelles de \mathbb{C} .
- Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 17 Soit A un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$. On pose $\mathcal{N}(A) = \{a \in A : a \text{ est nilpotent}\}$.

- Dans cette question, $A = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$. Montrer que $\bar{6} \in \mathcal{N}(A)$ puis que $\mathcal{N}(A) = \{\lambda\bar{6} : \lambda \in \mathbb{Z}\}$.
- Que peut-on dire de $\mathcal{N}(A)$ si A est intègre ?
- Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un sous groupe de $(A, +)$.