

**Exercice 1** Montrer que pour  $n \geq 1$ , l'équation

$$x^n + x^{n-1} + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0$$

admet une unique racine positive ; on la note  $u_n$ . Étudier la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 2** Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par :

$$\begin{aligned} u_n &= n - \sqrt{n^2 - n} & u_n &= \sqrt{n(n+a)} - n & u_n &= \frac{n}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \\ u_n &= \frac{\sin n^2 - \cos n^3}{n} & u_n &= (\cos n) \sin \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

**Exercice 3** 1. On donne  $A \geq 0, B \geq 0, u_0 \geq 0$  ; étudier la suite définie par la relation de récurrence  $u_{n+1} = \frac{A}{n+1} + Bu_n$ .

2. Étudier la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{4n}{n+1} - u_n$  (on pourra utiliser la question précédente pour terminer).

**Exercice 4** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0$  et  $u_1$  strictement positifs et  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .

1. Montrer que  $\lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  existe et la déterminer. Que remarquez-vous ?
2. Soit  $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ .
3. Montrer que  $a_{2n}$  et  $a_{2n+1}$  sont adjacentes.
4. Déterminer un rationnel  $r$  tel que  $\left|r - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < 10^{-3}$ .

**Exercice 5** Étude de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 \in [0, 1], u_{n+1} = u_n^2.$$

Donner un équivalent de  $u_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 6** Montrer la réciproque du théorème de Césaro (i.e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ ) :

1. dans le cas où  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$  et  $u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ .
2. dans le cas où  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

**Exercice 7** Étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$ . En utilisant  $v_n = \frac{u_n^2}{4}$ , donner un équivalent de  $u_n$ . *Indication* : on montrera que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} - v_n = 1$ , on en déduira un équivalent de  $v_n$  puis de  $u_n$ .

**Exercice 8** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ . L'étudier et, en utilisant  $v_n = \frac{1}{u_n}$ , en donner un équivalent dans le cas  $u_0 \in ]-1; 0]$ . Que dire dans le cas  $u_0 \in ]0; \infty[$  ? (On étudiera  $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ .)

**Exercice 9** Étudier la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}$ . En étudiant  $y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$ , en donner un équivalent.

**Exercice 10** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! x_n \in [n, n+1[$  solution de  $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$ . Donner un équivalent de  $x_n$  puis faire un développement asymptotique de  $x_n - n$  à l'ordre 5 en fonction de  $\frac{1}{n}$ .

**Exercice 11** Soient  $(u_n)_{n \geq 2}$  définie par  $u_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$  et  $v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ .

1. Montrer que  $(u_n)_{n \geq 2}$  est convergente.
2. Montrer que  $(v_n)_{n \geq 2}$  est une suite géométrique. En déduire la limite de  $(u_n)_{n \geq 2}$ .

**Exercice 12** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée non convergente de nombres réels telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ . Montrer que l'ensemble des limites des suites extraites de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forment un intervalle de  $\mathbb{R}$ .