Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :
• Si $(u_n)_n$ converge vers un réel l alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
• Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite l, il en est de même de $(u_n)_n$.

Exercice 2 Montrer que (u_n) converge ssi $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent (leurs limites n'étant pas nécessairement égales).

Exercice 3 Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

Exercice 4 Étudier la convergence des suites :

$$\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n} \qquad \frac{n\sin(n)}{n^2+1} \qquad \frac{1}{n}+(-1)^n \qquad (-1)^n\frac{n+1}{n}.$$

Exercice 5 Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$. On considère $a \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. Si f est croissante, alors (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante.
3. Si (u_n) est croissante et f monotone, alors f est croissante.
4. Si (u_n) converge vers une limite l, alors l est point fixe de f.

Exercice 6 Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
2. Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie $l^2 - l - 1 = 0$ et calculer l.

Exercice 7 On donne la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{2-u_{n-1}}.$$

En étudiant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 8 On considère la suite réelle définie par :

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n+1}.$$

1. Montrer que x_n est supérieur ou égal à 1 pour tout n.
2. Montrer que si (x_n) converge, sa limite l vérifie
$$l = \sqrt{2l+1}.$$
3. l étant définie par l'égalité de 2), est-il possible de trouver $k \in]0,1[$ tel que
$$|x_n - l| \leqslant k|x_{n-1} - l|.$$
Si oui en déduire que $|x_n - l| \leqslant k^n|x_0 - l|$. Conclure.

Exercice 9 Soit une suite qui vérifie une relation de récurrence $u_n = \dfrac{au_{n-1}+b}{cu_{n-1}+d}$ et on note $f : x \mapsto y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

1. Montrer que si la fonction f a deux points fixes distincts, α et β, on peut écrire : $\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k\dfrac{u_{n-1}-\alpha}{u_{n-1}-\beta}$. Calculer $\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ en fonction de $\dfrac{u_1-\alpha}{u_1-\beta}$.
2. Montrer que si la fonction f a un seul point fixe γ, on peut écrire : $\dfrac{1}{u_n-\gamma} = \dfrac{1}{u_{n-1}-\gamma} + k$. Calculer $\dfrac{1}{u_n-\gamma}$ en fonction de u_1.

Exercice 10 Soit $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que
$$\forall n > 0 \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?