Exercice 1 Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai** ou **faux** ?

1. $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$,
2. $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$,
3. $\sup(-A) = -\inf A$,
4. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A+B)$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Tracer les graphes des fonctions $f, |f|, f_+, f_-$ où : $f_+ = \max(f, 0), f_- = \min(f, 0)$.

Exercice 3 Si $a = \sup A$, montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. Réciproque?

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose $A_p = \sup\limits_{n>p} u_n$ et $B_p = \inf\limits_{n>p} u_n$. Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante bornée et que $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante bornée. Soit $L = \lim\limits_{p\to\infty} A_p$ et $l = \lim\limits_{p\to\infty} B_p$.

1. Dans le cas particulier où $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{3}$, calculer L et l.
2. Montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p,\ u_n > l - \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant p,\ u_n < l + \varepsilon$$
3. Interpréter ces propriétés. Énoncer des propriétés analogues pour L. Démontrez-les.
4. Que peut-on dire de (u_n) si $L = l$?

Exercice 5 Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. Enoncer un résultat analogue pour $\inf(A \cup B)$.
3. Qu'en est-il pour $A \cap B$?

Exercice 6 Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.
Montrer que dans les deux cas on a :
$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Exercice 7 Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ montrer que :
$$2xy \leqslant \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2.$$

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = nf(1)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z} : f(n) = nf(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q} : f(q) = qf(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = xf(1)$ (on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour encadrer x par des rationnels de plus en plus proches de x).

Exercice 9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in [0,1]^n$, montrer que :
$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Exercice 10 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$A \neq \emptyset,$$
$$\forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0,]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\subset A,$$
$$\forall x \in \mathbb{R} : (\forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset) \Rightarrow x \in A.$$
Montrer que $A = \mathbb{R}$.

Exercice 11 Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques :
$$\left\{ \frac{a}{2^k}, (a,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Soient A et B deux parties denses de $\mathbb{R}$, AB et $A+B$ sont-elles denses ? Étude de la réciproque.