

Exercice 1 Les quatre points A, B, C et D de l'espace sont-ils coplanaires ? Si oui, donner une équation cartésienne du plan qui les contient :

1. $A(1, 2, 2), B(-1, -2, -1), C(3, 4, 4)$ et $D(-2, 3, 1)$.
2. $A(0, 1, 3), B(1, 2, -1), C(1, 1, -1)$ et $D(1, 2, 2)$.

Exercice 2 Trouver une équation du plan (P) défini par les éléments suivants.

1. $A(1, 1, 1), B(2, 0, 1)$ et $C(-1, 2, 4)$.
2. $A(1, 2, 1), \vec{u}(4, 0, 3)$ et $\vec{v}(1, 3, -1)$.
3. $A(4, 1, -3)$ et $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$
4. $A(1, 1, 0)$ et $(D) : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$
5. $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

Exercice 3 Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 - s - t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + 3u - v \\ y = 3 + 3u + v \\ z = 1 - 2u \end{cases} .$$

Exercice 4 Quelle est la nature de l'intersection des trois plans suivants? Si c'est un point en donner les coordonnées, si c'est une droite en donner un vecteur directeur.

1. $(P) : z = 1, (P') : x - y - 2 = 0$ et $(P'') : 4x - 2y + z + 2 = 0$.
2. $(P) : 4x - 2y + 3z + 5 = 0, (P') : 3x + y - z + 2 = 0$ et $(P'') : x - y + z + 1 = 0$.

Exercice 5 Dans chacun des cas suivants dire si la droite (D) et le plan (P) sont parallèles ou sécants. Donner alors leur point d'intersection.

1. $(D) : \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ et $(P) : 4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

$$2. (D) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad (P) : -3x + 2y + 3z - 5 = 0.$$

Exercice 6 Donner une condition sur m pour que les trois plans suivants se coupent sur une même droite. $(P) : x + my - z + 1 = 0, (P') : (m + 1)x + 3y + 4z - 2 = 0$ et $(P'') : y + (2m + 4)z - (2m + 2) = 0$.

Exercice 7 Déterminer la distance du point A au plan (P)

1. $A(1, 1, 1)$ et $(P) : x + y + z - 1 = 0$
2. $A(1, 0, 2)$ et $(P) : 2x + y + z + 4 = 0$.

Exercice 8 Calculer la distance du point $A(1, 1, 1)$ à la droite $(D) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$.

Exercice 9 Déterminer l'ensemble des points de l'espace équidistants des trois axes de coordonnées.

Exercice 10 On considère la droite D d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 1 \\ z = -t - 1 \end{cases}$

Donner une équation des deux plans P et P' contenant D à une distance de 1 de l'origine (point O de coordonnées $(0, 0, 0)$).

Exercice 11 Ecrire l'équation du plan passant par la droite $\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0 \\ x + 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ et parallèle à la droite $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}$.

Exercice 12 Soit la droite d'équations $\begin{cases} 3x - 2y - z + 4 = 0 \\ x - 4y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$. Trouver sa projection sur le plan $5x + 2y + 2z - 7 = 0$.

Exercice 13 Soit les droites D et D' non coplanaires :

$$(D) \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D') \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Trouver des équations de leur perpendiculaire commune.