Exercice 1 Soient x, y et z trois réels tels que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1$. Montrer l'inégalité : $(x + y + z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$.

Exercice 2 Soient x, y et z trois réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Montrer que $(x + 2y + 3z)^2 \leqslant 14$.

Exercice 3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^p$. Montrer l'inégalité :

$$\| \sum_{i=1}^{n} v_i \|^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2.$$

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2.$$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 4 Montrer que

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 5 Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ des réels positifs. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k \sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k.$$

Exercice 6 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^p$ tels que pour tout $i \neq j \in [\![1, n]\!]$: $\langle X_i, X_j \rangle < 0$. Montrer par récurrence sur p que $n \leqslant p + 1$.

Exercice 7 Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^p$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^p$ et que donc $p = n$.

Exercice 8 Montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^p)^2 : \|x + y\|^2 + 1 \leqslant 2 \left(1 + \|x\|^2\right) \left(1 + \|y\|^2\right).$$

Exercice 9 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$. On note $F + G$ l'ensemble

$$F + G = \{x + y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

Montrer que $F + G$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. et que

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \text{ et } (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 10 On considère dans $\mathbb{R}^3$ le sev

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\right\}.$$

1. Déterminer la dimension et un système d'équations de $F^\perp$.
2. Pour $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ déterminer le couple $(X_1, X_2) \in F \times F^\perp$ tel que $X = X_1 + X_2$.

Exercice 11 Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Déterminer des bases de P et $P^\perp$, puis une base orthonormale de $P^\perp$.

Exercice 12 Orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ la famille $X_1 = (1, -2, 2)$, $X_2 = (-1, 0, -1)$, $X_3 = (5, -3, 7)$.

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation:

$$(1 - x)^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$