

Exercice 1 Résoudre sur \mathbb{R} :

1. $y'' - 4y = 4e^{-2x}$.
2. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x$.
3. $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$.
4. $y'' + y = e^{-|x|}$.

Exercice 2 On considère l'équation homogène (E) $ay'' + by' + cy = 0$, avec $a \neq 0$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes liant les coefficients a, b et c dans les deux cas suivants :

- (i) toutes les solutions de (E) tendent vers 0 lorsque x tend vers l'infini ;
- (ii) toutes les solutions sont périodiques.

Exercice 3 On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) .
2. Trouver une solution particulière de (E) , puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E) .
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

- (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E) .
- (b) En déduire une expression de f .

Exercice 4 Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \quad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2) \cos mx$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ (Indication : On traitera séparément les cas $m = 0$ et $m \neq 0$).

Exercice 5 On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 6y' + 9y = d(x) \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) .
2. Trouver une solution particulière de (E) lorsque, respectivement, on pose :

$$d(x) = (x^2 + 1)e^{-3x} \quad \text{et} \quad d(x) = \cos x.$$

3. Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque :

$$d(x) = 2(x^2 + 1)e^{-3x} + 50 \cos x.$$

Exercice 6 Trouver les $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f''(x) + f(-x) = x$.

Exercice 7 Résoudre sur $]0, +\infty[$ $xy'' - y' - x^3y = 0$ en posant $z(t) = y(\sqrt{t})$.

Exercice 8 Résoudre en posant $z(t) = y(e^t)$ ou $y(-e^t)$ suivant le signe de x , les équations différentielles (d'Euler) suivantes :

1. $x^2 y'' - 2y = x$.
2. $x^2 y'' + xy' + y = x \ln |x|$.

Exercice 9 Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli $x^2 y^2 - xy' - 3y = 0$ en supposant que y ne s'annule pas et en posant $z = \frac{1}{y}$.

Exercice 10 (difficile) Soit p continue positive non nulle ; montrer que toute solution de $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .

Exercice 11 (difficile) Montrer que toute solution de $y''(x)e^{-x^2} + y(x) = 0$ est bornée sur \mathbb{R} .

Exercice 12 En posant $t = \arctan x$, résoudre :

$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2} y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Exercice 13 Résoudre par le changement de fonction $z = \frac{y}{x}$ l'équation différentielle :

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0.$$