

Exercice 1 Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\int_1^{\infty} x^x dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx.$$

Convergence et calcul de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2) dt}{t^2},$$

$$\int_0^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt,$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt.$$

Exercice 2 1. Montrer que $\forall x > -1 \ln(1+x) \leq x$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [0, n] (1 - \frac{x}{n})^n \leq e^{-x} \leq (1 + \frac{x}{n})^{-n}$.

3. En déduire que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} dt.$$

Rappel (intégrales de Wallis) :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n d\theta \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

4. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n} du$ existe et vaut I_{2n-2} .

5. Montrer que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3 Étude de :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$$

Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 4 Étudier la fonction :

$$h : x \rightarrow \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}.$$

Domaine de définition, continuité et dérivabilité, variations, limites aux bornes de ce domaine, et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x}$, éventuellement convexité.

Exercice 5 Soit f une fonction positive décroissante de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , telle que $\int_0^{\infty} f(x) dx$ existe. Montrer que :

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ quand } x \rightarrow \infty.$$

Exercice 6 Soit f une application continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} telle que $\int_0^{\infty} f^2$ existe. Montrer que quand $x \rightarrow \infty$:

$$\int_0^x f(t) dt = o(\sqrt{x}).$$

Exercice 7 Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et monotone, telle que $\int_0^1 f$ existe. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, tendant vers ℓ en $+\infty$, montrer alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{f(t)n}{n^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \ell.$$