

**Exercice 1** 1. Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et injective alors elle est strictement monotone.

2. Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que:  $\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f \circ f(x) = x$ .

**Exercice 2** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  croissante telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$ . Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$ .

**Exercice 3** Soient  $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continues telles que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer qu'il existe  $x \in [0, 1]$  tel que  $f(x) = g(x)$  (on pourra s'intéresser aux points fixes de  $f$ ).

**Exercice 4** Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  croissante telle que  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  est décroissante. Montrer que  $f$  est continue.

**Exercice 5** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par:

$$\begin{cases} f(x) = |x| \left( 2 + \sin \frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue, minimale en 0, mais pour tout  $\varepsilon > 0, f|_{[0, \varepsilon]}$  n'est pas monotone.

**Exercice 6** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée. On note  $\mathcal{E} = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ croissantes tq } g \leq f\}$ , et pour  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\tilde{f}(x) = \sup \{g(x) \text{ tq } g \in \mathcal{E}\}.$$

1. Montrer que  $\tilde{f} \in \mathcal{E}$ .
2. On suppose  $f$  continue. Montrer que  $\tilde{f}$  est aussi continue. (ind: s'il existe un point  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \tilde{f}(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} \tilde{f}(x)$ , construire une fonction de  $\mathcal{E}$  supérieure à  $\tilde{f}$ )

**Exercice 7** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uniformément continue. Pour  $x \in ]0, 1[$  on pose :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sup (f(]0, x])) \\ h(x) &= \inf (f(]0, x])) \end{aligned}$$

1. Montrer que  $g$  et  $h$  sont monotones.

$$\text{On note } \ell = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \text{ et } m = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x).$$

2. En utilisant la continuité uniforme de  $f$ , montrer que  $\ell = m$ .

3. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell$ .

**Exercice 8** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $T > 0$ . On suppose que  $f$  est  $T$ -périodique.

1. Si  $f$  possède une limite en  $+\infty$ , montrer que  $f$  est constante.
2. Si  $f$  est continue non constante, montrer que  $f$  a une plus petite période.
3. Si  $f$  est continue, montrer que  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

**Exercice 9** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue ayant une limite finie en  $+\infty$ .

1. Montrer que  $f$  est bornée.
2. Montrer que  $f$  admet un maximum ou un minimum absolu, mais pas nécessairement les deux.
3. Montrer que  $f$  est uniformément continue.

**Exercice 10** Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. On pose pour tout  $x \in \mathbb{R} : h(x) = \max (f(x), g(x))$ . Montrer que  $h$  est continue.

**Exercice 11** 1. Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x) < g(x).$$

Montrer que  $f \leq g$ .

2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue dont la restriction à  $\mathbb{Q}$  est strictement croissante. Montrer que  $f$  est strictement croissante.

**Exercice 12** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uniformément continue. On pose

$$g(x) = \sup (f(]x, x + 1])).$$

Montrer que  $g$  est continue. Même question en supposant seulement  $f$  continue.