Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

On veut montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$,

1. Montrer que: $\exists B > 0 \mid \forall x \geqslant B, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x+n) - f(x)| \leqslant n\frac{\varepsilon}{2}$.

   On fixe désormais un tel B.
2. Justifier l'existence $M = \sup_{[B,B+1]} |f(x)|$.
3. Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, x - E(x-B) \in [B, B+1[$.
4. Montrer que: $\forall x \geqslant B, |f(x)| \leqslant M + (x-B)\frac{\varepsilon}{2}$.
5. Montrer que: $\exists B' > 0 \mid \forall x \geqslant B', M - B\frac{\varepsilon}{2} \leqslant x\frac{\varepsilon}{2}$.

   On fixe désormais un tel B'.
6. Déduire de tout ce qui précède que: $\forall x \geqslant \max(B, B'), \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$.
7. Conclure.
8. APPLICATION: Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* : f(xy) = f(x) + f(y).$$

   (a) Montrer que $f(1) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

   (b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$ et en déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} xf(x) = 0$.

   REMARQUE: Celà montre que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$.

Exercice 2 À quelle condition sur f et g a-t-on $e^f \underset{a}{\sim} e^g$?

Exercice 3 Soient f et g équivalentes au voisinage de a et strictement positives. Montrer que si f admet en a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ différente de 1 alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

Exercice 4 Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ telle que pour tout x et x' ($x \neq x'$) de $[a,b]$ on ait : $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[a,b]$. (On pourra introduire la fonction: $x \mapsto g(x) = f(x) - x$).

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que

$$f(0) = 1, \lim_{-\infty} f = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} f = 0.$$

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 7 Soient f et g continues sur $[0,1]$ telles que $\forall x \in [0,1]\ f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]\ f(x) + m < g(x)$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 9 Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\forall x \geqslant 0$, la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Montrer $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exercice 10 Soit $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$, montrer qu'alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 11 Soit f continue sur $[a,b]$, montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in [a,b]^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| + \varepsilon.$$

Exercice 12 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n).$$