Exercice 1 Sur $\mathbb{R}_3[X]$ on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaire.

$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$
$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q(t) + P'(t)Q(t)dt$$
$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

Exercice 2 A deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$< P, Q >= (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 3 A deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le nombre

$$\phi(P,Q) = \int_{0}^{1} P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Lorsque $n = 2$, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire

Exercice 4 Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, $I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente. Que vaut I_{2p+1} ?

   Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.
2. Montrer que φ est un produit scalaire.
3. On suppose $n = 2$. Construire une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt appliqué à $(1, X, X^2)$.

Exercice 5 Calculer :

$$\alpha = \inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \left(ax^2 + bx + c - |x|\right)^2 dx \ \text{ et } \beta = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{0}^{1} x^2 |\ln x - ax - b|^2 dx.$$

Exercice 6 Soit E un espace euclidien (de dimension finie), F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Déterminer $(F+G)^\perp$ et $(F \cap G)^\perp$ en fonction de $F^\perp$ et $G^\perp$.

Exercice 7 Soient E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espace vectoriels supplémentaires de E et p le projecteur de E d'axe F et de direction G.

1. On suppose que $F \perp G$. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. On suppose que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
   (a) Soient $a \in F$ et $b \in G$. Montrer que $\|a + b\| \geqslant \|a\|$.
   (b) En déduire que $F \perp G$.

Exercice 8 On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $(P,Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0) \ ?$$

Exercice 9 Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ des réels positifs. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k \sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k.$$