

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 1$,
2. $y' = \cos x + y$,
3. $y' + 2y = (x - 2)^2$.

Exercice 2 Pour chacune des équations différentielles qui suit : écrire la solution passant par le point $M(\cdot, \cdot)$ et tracer sommairement le graphe de la solution.

1. $y' + 2xy = 0$, $M = (0, 1)$,
2. $y' + y \tan x = \sin x \cos x$ $M = (\frac{\pi}{4}, 0)$.

Exercice 3 On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, \infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0, \infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E1) \quad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$

3. Intégrer (E1) sur $]0, \infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0, \infty[$.

Exercice 4 Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + 2y(x) = 0 \text{ avec } (y - y')(0) = 1.$$

Exercice 5 Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes:

1. $(1 + x^2)y' - xy = 0$;
2. $y' + y \tan x = 0$, pour x dans $] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} [$.

Exercice 6 Résoudre et raccorder éventuellement :

1. $xy' - 2y = x^4$.
2. $x(1 + x^2)y' = y$.
3. $(x^2 + 1)y' + (x - 1)^2y = x^3 - x^2 + x + 1$.
4. $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$.
5. $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$.

Exercice 7 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}.$$

Exercice 8 Résoudre l'équation différentielle de Riccati $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$ en trouvant une solution particulière y_0 et en posant $z = \frac{1}{y - y_0}$.

Exercice 9 Soit l'équation différentielle :

$$(E) : \frac{dy(x)}{dx} + y(x) = x^2 + 2x$$

Intégrer (E) et montrer que par un point donné il passe une et une seule courbe intégrale. Soit H l'ensemble des points M tels que la courbe intégrale passant par M a une tangente horizontale en ce point, et I l'ensemble des points M tels que la courbe intégrale passant par ce point a un point d'inflexion en ce point. Tracer H, I et la courbe intégrale passant par $O(0, 0)$. En déduire un tracé géométrique des courbes intégrales.

Exercice 10 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f'(x) + \alpha f(x)) = 0$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$