Exercice 1 Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Exercice 2 Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Exercice 3 Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

Exercice 4 Soient $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$ des entiers ; montrer que :

1. $n-1 | n^m - 1$;
2. $(n-1)^2 | n^m - 1$ si et seulement si $n-1|m$.

Exercice 5 Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 6 Montrer que si x et y sont des entiers naturels tels que x^2 divise y^2, alors x divise y. Application : démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 7 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Exercice 8 Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 7$ soit divisible par 13.

Exercice 9 On définit les trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{7n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \\ E_2 &= \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \text{ est multiple de } 4\} \\ E_3 &= \{28n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

1. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, déterminer si on a l'inclusion $E_i \subset E_j$.
2. Ecrire $E_1 \cap E_2$ sous la forme $E = \{n \in \mathbb{N}\,,\ \mathcal{P}(n)\}$. Montrer que $E_1 \cap E_2 = E_3$.

Exercice 10 Montrer que si r et s sont deux nombres entiers naturels somme de deux carrés d'entiers alors il en est de même pour le produit rs.

Exercice 11 Soit n un entier relatif. Montrer que soit 8 divise n^2, soit 8 divise $n^2 - 1$, soit 8 divise $n^2 - 4$.

Exercice 12 Étant donnés deux nombres relatifs n et p montrer que soit np est pair, soit $n^2 - p^2$ est divisible par 8.

Exercice 13
1. Soit n un entier naturel dont le reste de la division euclidienne par 5 vaut 2 ou 3, montrer que $n^2 + 1$ est divisible par 5.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n^5 - n$ est divisible par 5.

Exercice 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que parmi les trois entiers $n.(n+1)$, $n.(n+2)$ et $(n+1).(n+2)$, il y en a exactement deux qui sont divisibles par 3.

Exercice 15
1. Pour tout couple de nombres réels (x, y) montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a la relation

$$(*)\ x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

Indication: on pourra écrire de deux manières différentes la quantité $y(x^n - y^n) + (x-y)x^n$.

2. Soit (a, b, p) des entiers éléments de $\mathbb{N}$. En utilisant la formule $(*)$, montrer que s'il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $b = a + pl$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $b^n = a^n + pm$.
3. Soient a, b, p des entiers éléments de $\mathbb{N}$, en utilisant la question 2, montrer que si $a - b$ est divisible par p,

$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$$

est aussi divisible par p. En déduire, à l'aide de la question 2 et de la formule $(*)$, que si $a - b$ est divisible par p^n i.e. il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $a - b = l.p^n$, alors $a^p - b^p$ est divisible par p^{n+1}.

Exercice 16 Calculer 2007^{2007} modulo 7.