Exercice 1 Soit H un groupe abélien, on note K l'ensemble des éléments d'ordre fini de H. Montrer que K est un sous-groupe de H.

Exercice 2

1. Soit φ un homomorphisme de G à valeurs dans H et g un élément de G d'ordre n. Montrer que :
   - $\varphi(g)$ est d'ordre fini inférieur ou égal à n.
   - Si φ est injectif, l'ordre de $\varphi(g)$ est égal à n.
2. Montrer que si G n'a qu'un nombre fini d'éléments, tous ses éléments ont un ordre fini.

Exercice 3 Soit le groupe $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Déterminer le sous-groupe H de G engendré par $\overline{6}$ et $\overline{8}$ et déterminer son ordre.
2. Caractériser les générateurs de G.
3. Quel est l'ordre de l'élément $\overline{9}$?

Exercice 4 Soient G un groupe et $x \in G$ un élément d'ordre n. Quel est l'ordre de x^2 ?

Exercice 5 Soient G un groupe et $x, y \in G$ des éléments qui commutent et d'ordres respectifs m et n premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre mn. Montrer que l'hypothèse m et n *premiers entre eux* est indispensable.

Exercice 6 Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?

Exercice 7

1. Les sous-groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$ sont-ils isomorphes ?
2. Les sous-groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 8 Montrer que les groupes multiplicatifs $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 9 Soient $a, b \in \mathbb{C}$. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto iz - \overline{z}$ est-elle un (endo)morphisme...

1. ...du groupe $\mathbb{C}$?
2. ...de l'anneau $\mathbb{C}$?

Exercice 10 Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G sur lequel on définit la loi $+$ par $f + g$: $\begin{cases} G \to G \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$.
Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 11 Soient A et B deux anneaux. On définit sur $A \times B$ les lois

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy')$$

1. Montrer que $A \times B$ est alors un anneau.
2. Si A et B sont des corps, en est-il de même pour $A \times B$?

Exercice 12 Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif pour les lois usuelles de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 13 Soit A un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$. On pose $\mathcal{N}(A) = \{a \in A : a \text{ est nilpotent}\}$.

1. Dans cette question, $A = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{6} \in \mathcal{N}(A)$ puis que $\mathcal{N}(A) = \{\lambda\overline{6} : \lambda \in \mathbb{Z}\}$.
2. Que peut-on dire de $\mathcal{N}(A)$ si A est intègre?
3. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un sous groupe de $(A, +)$.

Correction 1 Notons K l'ensemble des éléments d'ordre fini de H. Montrons que K est un sous-groupe de H.

- $K \subset H$ et $0 \in K$.
- Si $x \in K$ alors $(-x) + (-x) + \cdots + (-x) = -(x + x + \cdots + x) = 0$. Donc $-x \in K$.
- Si $x, y \in K$ alors $(x + y) + \cdots + (x + y) = (x + \cdots + x) + (y + \cdots + y) = 0 + 0 = 0$. Donc $x + y \in K$.

Nous venons de montrer que K est un sous-groupe de H. De plus comme H est commutatif alors K l'est aussi !

Correction 4 Rappelons d'abord que pour x un élément d'ordre n, alors

$$x^q = e \Longrightarrow n|q.$$

- Si n est pair alors $ord(x^2) = n/2$: en effet $(x^2)^{\frac{n}{2}} = x^n = e$ et pour $p \geqslant 1$ tel que $(x^2)^p = e$ alors $x^{2p} = e$ et $n|2p$ donc $p \geqslant \frac{n}{2}$. Donc $n/2$ est le plus petit des entiers q (non nul) tel que $x^q = e$ et par conséquent $n/2$ est l'ordre de x.
- Si n est impair alors $ord(x) = n$. Tout d'abord $(x^2)^n = (x^n)^2 = e$ et pour p tel que $(x^2)^p = e$ alors $n|2p$ mais 2 et n sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, $n|p$ et en particulier $p \geqslant n$.

Correction 6 Par l'absurde supposons que $(\mathbb{Q}, +)$ est engendré par un seul élément $\frac{p}{q}$ (p et q premiers entre eux) alors tout élément de $\mathbb{Q}$ s'écrit $n\frac{p}{q}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $\frac{p}{2q}$ (qui appartient à $\mathbb{Q}$) doit s'écrire $n\frac{p}{q}$, mais alors $2n = 1$ avec $n \in \mathbb{Z}$ ce qui est impossible. Conclusion $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas monogène.

Correction 8 Soit $\phi : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ un morphisme entre les deux groupes multiplicatifs $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}^*$. Notons $a = \phi(i) \in \mathbb{R}^*$. Alors $\phi(-1) = \phi(i^2) = \phi(i)^2 = a^2$, de même $1 = \phi(1) = \phi((-1)^2) = \phi(-1)^2 = a^4$; donc $a^4 = 1$ et nécessairement $a^2 = 1$. Le morphisme ϕ n'est pas injectif car $\phi(1) = \phi(-1) = 1$, *a fortiori* ϕ n'est pas un isomorphisme.