

Exercice 1 Soient les quatre fonctions de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R}^*

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = -x \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montre que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi \circ .

Exercice 2 Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes ?

1. $] -1, 1[$ muni de la loi définie par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$;
2. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ pour la multiplication usuelle ;
3. \mathbb{R}_+ pour la multiplication usuelle ;
4. $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ pour la loi de composition des applications.

Exercice 3 Soient (G, \cdot) un groupe et $a, b \in G$. On suppose que

$$(1) : ab^2 = b^3a \quad \text{et} \quad (2) : ba^2 = a^3b.$$

1. Montrer, en utilisant seulement (1), que $a^2b^8a^{-2} = b^{18}$ puis que $a^3b^8a^{-3} = b^{27}$.
2. En déduire, en utilisant (2), que $a^3b^8a^{-3} = b^{18}$ et enfin que $a = b = 1$.

Exercice 4 Soient (G, \star) et (H, Δ) deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi \heartsuit par $(x, y) \heartsuit (x', y') = (x \star x', y \Delta y')$.

1. Montrer que $(G \times H, \heartsuit)$ est un groupe.
2. Si G est de cardinal 2, dresser la table de $G \times G$ et la reconnaître parmi les exemples des exercices précédents.

Exercice 5 Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G . Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 6 Déterminer le sous-groupe de \mathbb{Z} engendré par les entiers 24, 36 et -54 .

Exercice 7 Si K est un sous-groupe de H et H un sous-groupe de G , montrer que K est un sous-groupe de G .

Exercice 8 1. Soit (G, \cdot) un groupe. Montrer l'équivalence de:

- i) G est abélien.
- ii) Pour tout $a, b \in G$, on a: $(ab)^2 = a^2b^2$.
- iii) Pour tout $a, b \in G$, on a: $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
- iv) L'application f de G dans G définie par $f(x) = x^{-1}$ est un automorphisme.

2. En déduire que si pour tout $x \in G$, $x^2 = e$, alors G est abélien.

Exercice 9 Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (resp. de (\mathbb{R}^*, \times)) contenant 1 ? Contenant 2 ?

Exercice 10 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé. Montrer que $S_\lambda = \{\exp(i\lambda t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de (\mathbb{C}, \times) . Pour quelles valeurs de λ retrouve-t-on des sous-groupes bien connus? A quoi ressemblent les courbes S_λ ? Que peut-on dire, en terme de morphisme, de l'application $t \mapsto \exp(i\lambda t)$?

Exercice 11 Soit G un groupe. Montrer que l'ensemble $Aut(G)$ des automorphismes de G est un groupe pour la loi de composition. Soit H un sous-groupe de $Aut(G)$, et $\pi : G \rightarrow \wp(G)$ définie par : $\pi(x) = \{f(x) | f \in H\}$. Montrer que $\pi(G)$ est une partition de G .

Exercice 12 Soit G un groupe. Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme si et seulement si G est commutatif. On suppose G fini; soit ϕ un morphisme involutif de G dont le seul point fixe est e , montrer que :

$$\forall z \in G, \exists t \in G, z = t(\phi(t))^{-1}.$$

En déduire ϕ puis que G est commutatif.

Exercice 13 Décrire tous les homomorphismes de groupes de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} . Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

Correction 2 1. Oui.

2. Non. Le seul élément qui peut être l'élément neutre est 1 qui n'appartient pas à l'ensemble.
3. Non. 0 n'a pas d'inverse.
4. Oui.

Correction 5 • Si $H \subset K$ alors $H \cup K = K$, qui est un sous-groupe de H .
Même chose si $K \subset H$.

- Réciproquement, supposons que $H \cup K$ est un sous-groupe de G . Par l'absurde supposons que $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$. Alors il existe $x \in H \setminus K$ et $y \in K \setminus H$. Comme $x, y \in H \cup K$ et que $H \cup K$ est un groupe alors $x.y \in H \cup K$. Donc $x.y \in H$ ou $x.y \in K$. Par exemple supposons $x.y \in H$ alors comme $x \in H, x^{-1} \in H$ et donc comme H est un groupe $x^{-1}.x.y \in H$ et donc $y \in H$. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $y \in K \setminus H$. En conclusion, parmi les sous-groupes H, K l'un est inclus dans l'autre.

Correction 13 Soit $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un morphisme de groupe. Comme tout morphisme f vérifie $f(0) = 0$. Notons $a = f(1)$. Alors

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = a + a = 2.a.$$

De même, pour $n \geq 0$:

$$f(n) = f(1 + \dots + 1) = f(1) + \dots + f(1) = n.f(1) = n.a.$$

Enfin comme

$$0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) = a + f(-1),$$

alors $f(-1) = -a$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(n) = n.a.$$

Donc tous les morphisme sont de la forme $n \mapsto n.a$, avec $a \in \mathbb{Z}$.

Un morphisme $n \mapsto n.a$ est injectif si et seulement si $a \neq 0$, et surjectif si et seulement si $n = \pm 1$.