

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Problème 1

Partie A : règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1 . Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

2 . Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où μ est un réel, indépendant de n , à déterminer.

3 . On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.

(a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que,

$$\forall n \geq N : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

(b) Déterminer un réel positif K , indépendant de n , tel que

$$\forall n \geq N : u_n \leq K v_n.$$

(c) Prouver que la série $\sum u_n$ converge.

4 . On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

5 . Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n(\ln(n))^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Partie B. Applications

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

6 . Pour $n \geq 2$, on pose

$$w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

7 . Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4 + 1)^n}$.

(a) Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.

(b) Etablir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

(c) En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

8 . Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1 ; \forall n \geq 1, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} ; S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(a) Indiquer (sans démonstration) le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et pour $x \in]-R, R[$, la valeur de $S(x)$.

(b) Utiliser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

(c) Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$$

(d) Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.

(e) On suppose que $-1 < \alpha < 0$.

(i) Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.

(ii) Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

(iii) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Problème 2

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

9 . Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, les séries

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$$

convergent.

10 . Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

11 . Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

12 . Etablir : $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2$,

$$S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$$

13 . En déduire: $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2$,

$$|S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y-x|.$$

14 . Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0, +\infty[$.

15 . Montrer, pour tout couple (x, y) de $([0, +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

16 . En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que:

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

17 . Préciser les valeurs de $S'(0)$ et $S'(1)$.

18 . On admet que S est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et que:

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad S''(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que S est concave.

19 . Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

(a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge et calculer sa valeur.

(b) Montrer: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(n),$$

et en déduire:

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

(c) Conclure que $S(x)$ équivaut à $\ln x$ en $+\infty$.

20 . Dresser le tableau de variation de S , en précisant la limite de S en $+\infty$.

21 . Tracer l'allure de la courbe représentative de S .