Devoir surveillé de Mathématiques – n° 8 –

durée: 2 heures

Partie 1

1 . Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, noté $\varphi_n(P)$ tel que $P(-1) - P(X) = (X+1)Q(X)$.

(b) Démontrer que l'application $\varphi_n : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$ est linéaire.

(c) Déterminer le noyau de φ_n. L'application φ_n est-elle surjective?

2 . Ecrire la matrice de φ_n de la base $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ sur la base $(1, X, ..., X^{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3 . Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$, on pose $\varphi_n(P) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j X^j$. Ecrire les b_j à l'aide des a_i.

Partie 2

Dans la suite, I désigne l'intervalle $]0,1]$, f une fonction continue par morceaux sur I, à valeurs réelles positives, et intégrable sur I.

4 . Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = \dfrac{f(x)}{1+x}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur I par $f_n(x) = x^n f(x)$. Démontrer que g et f_n sont intégrables sur I .

Dans la suite du problème, on note:

$$S_f = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\mathrm{d}x \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N} : u_n(f) = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\ .$$

5 . Démontrer que la série de terme générale $(-1)^n u_n(f)$ converge.

6 . Justifier l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n(f) = S_f$.

7 . Que devient l'égalité (question 6) dans les cas suivants:

(a) f est constante égale à 1.

(b) f est la fonction définie par $\forall x \in I : f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

(c) f est la fonction définie par $\forall x \in I : f(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$.

Partie 3

8 . Soit P un polynôme et $n \in \mathbb{N}$ son degré. Démontrer l'égalité:

$$\int_0^1 \frac{P(x)}{1+x} f(x)\mathrm{d}x = P(-1)S_f - \int_0^1 \varphi_n(P)(x) f(x)\mathrm{d}x.$$

Dans toute la suite, on considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $T_0(X) = 1 \quad T_1(X) = 1 - 2X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+2}(X) = 2(1-2X)T_{n+1}(X) - T_n(X).$$

9 . Déterminer le degré de T_n pour $n \in \mathbb{N}$ et montrer que les coefficients de T_n sont entiers relatifs.

10 . Soit (v_n) la suite définie par $v_n = T_n(-1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Etablir une relation entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) Expliciter alors v_n, pour $n \in \mathbb{N}$, en fonction de n.

11 . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T_n(-1) \neq 0$.

On pose $S_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(T_n)(x) f(x)\mathrm{d}x$ et $M_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |T_n(x)|$.

12 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'inégalité:

$$\left| S_f - \frac{S_n}{T_n(-1)} \right| \le \frac{M_n S_f}{|T_n(-1)|}\ .$$

13 . Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$T_n(\sin^2 x) = \cos(2nx)\ .$$

14 . Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $M_n = 1$ et en déduire l'inégalité

$$\frac{M_n}{|T_n(-1)|} \le \frac{2}{\left(3+\sqrt{8}\right)^n}\ .$$

15 . Expliquer comment construire une suite de nombres rationnels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une constante $K > 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\ln 2 - t_n| \le \frac{K}{\left(3+\sqrt{8}\right)^n}\ .$$