Devoir surveillé de Mathématiques – n° 7 –

durée: 4 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Problème 1

Dans ce problème, on note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$, l'application nulle de $\mathbb{R}^3$ est notée simplement 0.
on note Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même donnée par

$$\begin{cases} \Phi(e_1) = -e_1 + e_2 \\ \Phi(e_2) = 5e_1 + e_3 \\ \Phi(e_3) = -3e_1 \end{cases}$$

1 . Explicilter $\Phi\left((x_1, x_2, x_3)\right)$ pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

2 . Montrer que $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id} = 0$.

On note $\Pi(X)$ le polynôme $\Pi(X) = X^3 + X^2 - 5X + 3$ dans $\mathbb{R}[X]$.

3 . Montrer que $\Pi(X)$ possède une racine double que l'on explicitera.

4 . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tels que $\Phi(u) = \lambda u$. Montrer que $\Pi(\lambda) = 0$.

5 . Donner une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{C}$ égale à 1.

6 . Donner une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id})$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{C}$ égale à 1.

7 . Est ce que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id})$?

8 . Déterminer $x \in \mathbb{R}^3$, de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{C}$ égale à 1, vérifiant

$$\Phi(x) = x + (1,1,1)\,.$$

9 . Donner une base du sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Ker}([\Phi - \mathrm{Id}]^2)$ formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{C}$ égale à 1.

10 . Montrer que $\Phi(E) \subset E$ et que $\mathbb{R}^3 = E \oplus \mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})$.

11 . Donner une base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{C}$ égale à 1, dans laquelle on a

$$\begin{cases} \Phi(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \\ \Phi(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \Phi(\varepsilon_3) = -3\varepsilon_3 \end{cases}$$

12 . Exprimer, pour tout n entier naturel, $\Phi^n(\varepsilon_1)$, $\Phi^n(\varepsilon_2)$ et $\Phi^n(\varepsilon_3)$ dans la base $\mathcal{E}$, puis en déduire les expressions des vecteurs $\Phi^n(e_1)$, $\Phi^n(e_2)$ et $\Phi^n(e_3)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite à valeurs réels définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}.$$

On note $(V_n)_{n\geq 0}$ la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que $V_n = (u_{n+2}, u_{n+1}, u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13 . Donner V_0 et V_1.

14 . Montrer que, pour tout n entier naturel, $V_{n+1} = \Phi(V_n)$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \Phi^n(V_0)$.

15 . A l'aide de la **Question 12**, déterminer l'expression de V_n en fonction de n, puis déduire celle de u_n.

Problème 2

Pour $n \geq 1$, on pose : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

16 . Etudier la nature de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$. en déduire que la suite (u_n) converge. On note γ sa limite.

17 . Etudier les variations de la fonction h_x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h_x(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$$

18 . Justifier les inégalités :

$$\forall n \geq 3,\ \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{\ln(n)}{n} \text{ et } \forall n \geq 4,\ \frac{\ln(n)}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

19 . Prouver que la série $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

Pour $n \geq 3$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k},\ t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k},\ a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}$$

20 . Utiliser les inégalités établies en **Question 18** pour démontrer que :

(a) la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

(b) La suite $(a_n)_n$ converge.

21 . Montrer que $\forall n \geq 3,\ S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)\ln(2)$. en déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n.

22 . Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}$ (on exprimera cette limite en fonction de γ et de $\ln(2)$). déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

Problème 3

Soit x un nombre réel, on rappelle que s'il existe un nombre entier p qui vérifie $|p-x| < \frac{1}{2}$ alors p est l'entier le plus proche de x. On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x\ ;$$

On définit la suite (β_n) par $\beta_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

23 . Expliciter $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$ en fonction de n, pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

24 . Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n est un entier naturel.

On définit la suite (ρ_n) par $\rho_n = e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

25 . Préciser le signe de ρ_n en fonction de l'entier naturel n.

26 . Etablir, pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $n!|\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

27 . Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel $n \geq 1$, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$.

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

28 . Montrer que pour tout entier naturel n, $\beta_n = f^{(n)}(0)$.

Pour $n \geq 1$, on note :

- $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des applications bijectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
- γ_n le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$ sans point fixe (τ appartenant à $\mathcal{S}_n$ est sans point fixe si pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on a $\tau(k) \neq k$).

Pour $n = 0$ on adopte la convention : $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_1 = 0$.

29 . Rappeler sans justification le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$.

30 . Si $0 \leq k \leq n$, combien d'éléments de $\mathcal{S}_n$ ont exactement k points fixes ?

31 . Etablir pour tout entier naturel n la relation : $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \gamma_k = n!$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ lorsque la série converge.

32 . Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1.

33 . Calculer $e^x g(x)$ pour $x \in]-1,1[$, puis montrer que pour tout x de $]-1,1[$, $f(x) = g(x)$.

34 . Comparer les deux suites (β_n) et (γ_n) et en déduire la valeur de γ_8.