

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cours TD

Soit (G, \cdot) un groupe, on pose $H = \{x \in G \mid \forall g \in G : gx = xg\}$.

1. Montrer que H est un sous groupe de G .

On note $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes de G .

2. Montrer que $Aut(G)$ est un groupe pour la composition des applications.

Pour tout $a \in G$, on note $i_a : G \rightarrow G, x \mapsto axa^{-1}$

3. Montrer que i_a est un automorphisme de groupes.

On note $Int(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs i_a de G .

4. Montrer que $Int(G)$ est un sous groupe de $Aut(G)$.

5. Montrer que $\varphi : G \rightarrow Int(G), a \mapsto i_a$ est un morphisme de groupes et déterminer son noyau.

Fin Cours TD

Préliminaire

On rappelle que l'on définit la fonction cotan sur $]0, \pi[$ par

$$\cotan :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}.$$

6. Etudier et représenter graphiquement la fonction cotan sur $]0, \pi[$.

7. En utilisant la formule de Taylor écrire le DL de la fonction tan au voisinage de 0 à l'ordre 6.

8. En déduire le développement asymptotique de la fonction cotan à droite de 0 sous la forme

$$\cotan x = \frac{1}{x} - ax - bx^3 + O(x^5).$$

9. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la suite $\left(\sum_{k=0}^n x^k\right)_{n \geq 0}$ est convergente

de limite $\frac{1}{1-x}$, on écrira

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Pour tout $\alpha \in]1, +\infty[$, on note

$$s_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

10. Montrer que pour tout $\alpha \in]1, +\infty[$ la suite $(s_n(\alpha))_{n \geq 1}$ est croissante.

11. Par application du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall \alpha \in]1, +\infty[, \forall k \in \mathbb{N}^* : \frac{\alpha-1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \leq \frac{\alpha-1}{k^\alpha}$$

et en déduire que la suite $(s_n(\alpha))_{n \geq 1}$ est convergente.

On notera $\zeta(\alpha)$ la limite de la suite $(s_n(\alpha))_{n \geq 1}$ et on écrit

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

12. En utilisant la suite $(s_n(2))_{n \geq 1}$, montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, la suite

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - x^2}\right)_{n \geq 1}$$
 est convergente.

Étude d'une équation fonctionnelle

Soit E l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des applications continues de $]0, 1[$ dans \mathbb{R} , et T l'application de E dans E définie par

$$\forall f \in E, \forall x \in]0, 1[: T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

13. Vérifier que T est un endomorphisme de E .

14. Calculer la fonction $T(u)$ (en fonction de u) où u est la fonction définie sur $]0, 1[$ par

$$\forall x \in]0, 1[: u(x) = \cotan \pi x .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, 1[$, on pose

$$v_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x+k} \text{ et } w_n(x) = v_n(x) - \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} .$$

15. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, 1[$

$$v_n(x) = \frac{1}{x} - 2x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - x^2}$$

et que les fonctions v_n et w_n sont continues sur $]0, 1[$.

16. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ les suites $(v_n(x))_{n \geq 1}$ et $(w_n(x))_{n \geq 1}$ sont adjacentes et donc convergentes vers une limite, qu'on notera $v(x)$. On écrira

$$v(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} .$$

17. Montrer que pour tout $n \geq 1$, v_n est une fonction décroissante sur $]0, 1[$ et en déduire que v est aussi décroissante sur $]0, 1[$.

18. Déduire de ce qui précède que v est continue sur $]0, 1[$.

19. Établir une relation entre $T(v_n)$ et v_{2n} puis en déduire que $T(v) = 2v$.

20. Dans cette question, on considère une fonction f continue sur $[0, 1]$ telle que

$$\forall x \in [0, 1] : f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x) .$$

- Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = \max \{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$, qu'on note M , et qu'alors $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = M$.
- En déduire que f atteint son maximum au point 0.
- Montrer que f atteint aussi son minimum au point 0. Qu'en déduit-on pour la fonction f .

21. Comment choisir le réel a pour que la fonction $f = v - au$ soit prolongeable en une application \tilde{f} continue et 1 - périodique sur \mathbb{R} ?

22. Déduire de tout ce qui précède que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} : \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \pi \cotan \pi x .$$

Quelques applications

23. Montrer que $\forall x \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{x^2 - n^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2(k-1)}}{n^{2k}}$.

24. Utiliser les deux questions précédentes, et sans essayer de justifier les interversions des signes \sum , vérifier à l'aide d'un calcul formel que

$$\forall x \in]0, 1[: \pi \cotan \pi x = \frac{1}{x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) x^{2k-1} .$$

et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \pi \cotan \pi x = \frac{1}{x} - 2 \sum_{k=1}^n \zeta(2k) x^{2k-1} + o(x^{2n}), (x \rightarrow 0^+) .$$

25. En utilisant la question 8, préciser les valeurs exactes de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

26. Montrer que la fonction $x \mapsto \pi \cotan \pi x - \frac{1}{x}$ définie sur $]0, 1[$ est prolongeable par continuité en 0. En la considérant ainsi prolongée calculer l'intégrale $\int_0^x \left(\pi \cotan \pi t - \frac{1}{t} \right) dt$ pour $x \in]0, 1[$.

27. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$, exprimer l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{t^2 - n^2}$ sous la forme du logarithme d'un polynôme du second degré en x .

28. Prouver la formule $\forall x \in [-1, 1] : \sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$ où $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$ désigne la limite de la suite $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \right)_{n \geq 1}$.