Devoir surveillé de Mathématiques – n° 5 –

durée: 4 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation. Si vous sautez les questions Cours–TD sans tenter d'y répondre vous seriez sanctionné.
Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Cours TD

1 . Tracer puis déterminer la nature et les éléments de la courbe donnée par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$$

2 . Soient $\mathcal{D}$ une droite et $F \in \mathcal{D}$. Montrer que pour tout point $M \notin \mathcal{D}$, il passe exactement deux paraboles de foyer F et d'axe $\mathcal{D}$. Montrer que les tangentes à ces paraboles en M sont orthogonales.

Fin Cours TD

Exercice 1

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3 . Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$ puis préciser sa nature.

4 . Déterminer le foyer et la directrice de $\mathcal{C}$.

5 . Déterminer une équation de $\mathcal{C}$ en coordonnées polaires dans le repère $(F, \vec{I}, \vec{J})$ avec $\vec{I} = -\vec{i}$ et $\vec{J} = -\vec{j}$.

6 . Déterminer en un point M de paramètre t le centre de coubure à $\mathcal{C}$ noté N.

On appelle Γ l'ensemble des point N quand t décrit $\mathbb{R}$.

7 . Déterminer une représentation paramétrique de Γ.

8 . Etudier et tracer la courbe Γ.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction réelle définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.

9 . Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, on note u_n cette solution.

10 . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

11 . En revenant à la définition de u_n , montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n \mathrm{d}t$.

12 . Préciser une primitive de la fonction $t \longmapsto \tan t$ et calculer J_1 .

13 . Montrer que la suite $(J_n)_n$ est convergente et préciser sa limite.

14 . Calculer $J_n + J_{n+2}$ pour tout entier naturel n.

15 . Etablir la relation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = J_1 + (-1)^{n+1} J_{2n+1}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 4

On considère la suite $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin(n)}{n}$.

16 . Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t = 0.$$

17 . Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos(\frac{2n+1}{2}t) - \cos\frac{t}{2}\right).$$

18 . Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos\frac{t}{2}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}.$$

19 . Conclure que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = xe^x - n$.

20 . Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution réelle notée u_n et que cette solution est strictement positive.

21 . Montrer que pour tout $n \geq 3 : 1 \leq u_n \leq \ln(n)$.

22 . Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \ln(u_n) + u_n = \ln(n)$.

23 . Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

24 . Donner un équivalent simple de $u_n - \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

On considère , pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x} \text{ , et l'intégrale } I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

25 . Calculer I_0 et I_1 .

26 . Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle est convergente.

27 . Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

28 . Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .

29 . Déterminer des réels a et b tels que

$$I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) .$$

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$.

30 . Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n .

31 . En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.

32 . Montrer l'équivalence: $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.

33 . Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $J_n = (n+1)I_nI_{n+1}$ est constante et en déduire l'équivalence : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n) - n - \ln(n!)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

34 . Montrer l'équivalence : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

35 . En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

36 . Établir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$.

37 . En utilisant la question 33, en déduire que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}$.