

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction. Si vous sautez les questions Cours-TD sans tenter d'y répondre vous seriez sanctionné.
Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Cours TD

L'espace \mathbb{R}^3 est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

QUESTION 1 Soit \mathcal{D} une droite affine passant par un point A et de vecteur directeur unitaire \vec{u} . Montrer que le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}$ est indépendant du point $M \in \mathcal{D}$.

QUESTION 2 Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace \mathbb{R}^3 tels que

$$\|\vec{u}\| = 1 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

- (a) Déterminer, à l'aide des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , les vecteurs \vec{x} de \mathbb{R}^3 , solutions de l'équation: $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.
- (b) Démontrer qu'il existe une seule droite \mathcal{D} de l'espace \mathbb{R}^3 telle que l'un de ses vecteurs directeurs unitaires soit le vecteur \vec{u} et que tout point M de \mathcal{D} vérifie la relation: $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.
- (c) **Exemple :** les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont définis, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, par:

$$\vec{u} = \vec{i} \text{ et } \vec{v} = b\vec{j} + c\vec{k},$$

où b et c sont deux réels donnés. Déterminer la droite \mathcal{D} correspondante.

Dans toute la suite le plan euclidien \mathbb{R}^2 est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On pourra aussi se placer dans le plan complexe associé, i étant l'affixe du point de coordonnées $(0, 1)$.

QUESTION 3 Représenter graphiquement la courbe donnée par la représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \frac{t}{1+t} \\ y(t) = \ln(1+t^2) \end{cases}$$

QUESTION 4 Soit \mathcal{P} la parabole d'équation cartésienne $(y^2 = 2x + 1)$.

- (a) Justifier pourquoi les deux représentations polaires

$$r = \frac{1}{1 - \cos \theta} \text{ et } r = \frac{-1}{1 + \cos \theta}$$

définissent toutes les deux la parabole \mathcal{P} . On considère alors la représentation $r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$.

- (b) Représenter graphiquement la courbe \mathcal{P} .
- (c) En tout point $M = M(\theta)$, donner les vecteurs de Frénet \vec{T} et \vec{N} dans la base $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_{\theta + \frac{\pi}{2}})$.
- (d) Calculer le rayon de courbure R puis le centre de courbure Ω en un point $M = M(\theta)$.

QUESTION 5 Etudier et représenter graphiquement la courbe donnée en polaire par

$$r = \sin(\theta/2) \cos \theta.$$

On étudiera en particulier, le signe de $r(\theta)$, les points stationnaires s'ils existent et les tangentes aux points remarquables, le sens de monotonie de $r(\theta)$ n'étant pas exigé.

Fin Cours TD

Problème 1

QUESTION 6 Soit ABC un triangle et M un point quelconque du plan.

- (a) Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

- (b) En déduire que les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes en un point H appelé *orthocentre* de ce triangle.
- (c) Soit Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et K un point tel que

$$\overrightarrow{\Omega K} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}.$$

Montrer que $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et en déduire que $K = H$.

(d) Conclure que les points Ω, H et G (le centre de gravité de ABC) sont alignés.

QUESTION 7 Soit a, b, c trois réels tels que $a(b-c) \neq 0$ et A, B, C les points de coordonnées respectives $(0, a), (b, 0), (c, 0)$. Calculer les coordonnées de l'orthocentre D du triangle ABC .

On dira qu'une partie \mathcal{X} du plan est **orthocentrique** si elle n'est pas incluse dans une droite et si tout orthocentre d'un triangle dont les sommets appartiennent à \mathcal{X} appartient à \mathcal{X} .

QUESTION 8 Soit \mathcal{X} une partie orthocentrique du plan et f une similitude de représentation complexe

$$f : z \mapsto \alpha z + \beta, \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

(a) Montrer que si H est l'orthocentre d'un triangle ABC alors H' est l'orthocentre du triangle $A'B'C'$, où $H' = f(H), A' = f(A), B' = f(B)$ et $C' = f(C)$. (Indication: On pourra commencer par montrer que l'image du centre du cercle circonscrit à ABC est le centre du cercle circonscrit $A'B'C'$).

(b) En déduire que l'image par f de $\mathcal{X}, f(\mathcal{X})$, est aussi orthocentrique.

QUESTION 9 Soit k un réel non nul et soit \mathcal{Y} l'hyperbole d'équation $xy = k$.

(a) Soit A, B, C, D quatre points distincts de \mathcal{Y} , d'abscisses respectives a, b, c, d . Montrer que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont orthogonaux si et seulement si $abcd = -k^2$.

(b) Soit A, B, C trois points distincts de \mathcal{Y} , d'abscisses respectives a, b, c . Déterminer l'orthocentre H de ABC .

(c) Conclure que \mathcal{Y} est orthocentrique.

On considère un entier relatif non nul q et on note \mathcal{X} l'ensemble d'équation

$$\mathcal{X} : x^2 + qxy - y^2 = 1.$$

QUESTION 10 Montrer que l'équation $t^2 - qt - 1 = 0$ possède deux racines réelles distinctes.

On note r l'une de ces deux racines et f la similitude définie par la représentation complexe

$$f : z \mapsto (1 - ri)z.$$

QUESTION 11 Montrer que $f(\mathcal{X})$ est une hyperbole, d'équation $xy = k$, où k est un réel à déterminer.

QUESTION 12 En déduire que \mathcal{X} est un ensemble orthocentrique.

Problème 2

On considère la fonction f définie par:

$$f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(\cos x)$$

QUESTION 13 Ecrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 et en déduire qu'il existe des réels α, C et C' strictement positifs tels que

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[: -Cx^2 \leq \ln(\cos x) \leq -C'x^2.$$

QUESTION 14 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n (u_k)^2$$

et on suppose qu'elle est convergente.

(a) Montrer que la suite (u_n) est convergente de limite nulle.

(b) En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 : \cos u_n > 0 \text{ et } u_n \in]-\alpha, \alpha[.$$

(c) Pour tout $n \geq n_0$, on pose $v_n = \sum_{k=n_0}^n \ln(\cos u_k)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante minorée et donc convergente.

QUESTION 15 Soit $\beta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$P_n = \prod_{k=0}^n \cos \frac{\beta}{2^k}$$

- (a) Montrer que la suite (P_n) est décroissante positive admettant une limite $\ell_\beta \geq 0$.
- (b) En utilisant les résultats de la Question 14 précédente, montrer que $\ell_\beta > 0$.

Dans la suite du problème, on note Ω le cercle unité de centre O et de rayon 1, assimilé à l'ensemble des complexes de module 1. Pour tout entier n , on pose

$$\theta_n = \frac{2\pi}{2^{n+2}}$$

et on considère le polygone régulier Π_n défini par ses 2^{n+2} sommets

$$1, e^{i\theta_n}, e^{i2\theta_n}, \dots, e^{i(2^{n+2}-1)\theta_n}$$

QUESTION 16 Représenter sur une même figure Π_0 et Π_1 .

QUESTION 17 Soient A le point d'affixe 1, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, B le point d'affixe $e^{i\theta}$ et C le point d'affixe $e^{i2\theta}$. On note M le milieu de AC .

- (a) Montrer que l'aire du triangle OAC vérifie la relation:

$$\mathcal{A}(\text{Aire}(OAC)) = OM \cdot MA = \sin \theta \cdot \cos \theta.$$

- (b) En déduire que les aires respectives des triangles OAC et OAB vérifient la relation:

$$\mathcal{A}(\text{Aire}(OAC)) = 2 \cos \theta \cdot \mathcal{A}(\text{Aire}(OAB)).$$

QUESTION 18 Soit n un entier naturel. On note B_n le point d'affixe $e^{i\theta_n}$. exprimer l'aire du polygone Π_n en fonction de l'aire du triangle OAB_n .

QUESTION 19 En utilisant les résultats des Questions 17 et 18, montrer que:

$$\mathcal{A}(\text{Aire}(\Pi_n)) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \cdot \mathcal{A}(\text{Aire}(\Pi_{n+1})).$$

QUESTION 20 En admettant que lorsque n tend vers $+\infty$ l'aire du polygone Π_n tend vers l'aire du cercle Ω , montrer que $\ell_{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi}$ c'est à dire

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{2}{\pi}.$$