Devoir surveillé de Mathématiques – n° 3 –

durée: 4 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation. Si vous sautez les questions Cours–TD sans tenter d'y répondre vous seriez sanctionné.
Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

Cours TD

QUESTION 1 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs: $u = (x, 1, 0); v = (0, 0, 1)$ et $w = (1, y, 1)$, x et y étant deux paramètres réels.
Etudier selon x et y la dépendance et l'indépendance de la famille (u, v, w) et donner dans chaque cas une base du sous espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{u, v, w\}$.

QUESTION 2 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e_1}(1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e_2}(1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$?

QUESTION 3 Justifier l'inversibilité de la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et calculer son inverse par la méthode de Gauss-Jordan.

QUESTION 4 Discuter le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres réels x et y :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

QUESTION 5 Résoudre en fonction des paramètres réels a, b et c, le système:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + z = c \end{cases}$$

Fin Cours TD

Problème 1

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \qquad (1 - e^{-x})y'(x) + y(x) = \varphi(x).$$

On note G et F les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = \int_0^x e^t \varphi(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \frac{G(x)}{e^x - 1}.$$

QUESTION 6 Montrer que G et F sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

QUESTION 7 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_0) \qquad (1 - e^{-x})y'(x) + y(x) = 0.$$

QUESTION 8 Montrer que F vérifie $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer la solution générale de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

QUESTION 9 Vérifier que F est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant une limite finie quand x tend vers 0^+.

QUESTION 10 On suppose, dans cette question, que l'application φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x) \leq F(x)$.

(b) En déduire que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

QUESTION 11 On suppose dans cette question que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi(x) = e^{-x}.$$

Écrire explicitement $F(x)$, dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+$ puis construire son graphe dans un repère orthonormé.

Problème 2

On note $(\mathcal{L})$ l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathcal{L}): \quad y'' + q(x)y = 0 \quad \text{où } q(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2+x^4}.$$

QUESTION 12 Montrer que toute solution f de $(\mathcal{L})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

QUESTION 13 Si f est solution de $(\mathcal{L})$, montrer que la fonction $g : x \longmapsto f(-x)$ est aussi solution de $(\mathcal{L})$.

QUESTION 14 Soit f est solution de $(\mathcal{L})$, on considère les équations différentielles

$$(\mathcal{F}) : y'' + y = (1 - q(x))f(x) \quad \text{et} \quad (\mathcal{F}_0) : y'' + y = 0.$$

Donner les solutions réelles de l'équation homogène $(\mathcal{F}_0)$ puis celles de $(\mathcal{F})$.

QUESTION 15 (Inégalité de Gronwall) Soient h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et a continue sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \leq a(x)h(x).$$

Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Longrightarrow h(y) \leq h(x) \exp\left(\int_x^y a(t)dt\right)$. (On pourra étudier la fonction $x \longmapsto h(x)\exp(\int_x^y a(t)dt)$ pour y fixé).

Dans toute la suite f est une solution de $(\mathcal{L})$. On pose $h = f^2 + (f')^2$.

QUESTION 16 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \leq (q(x) - 1)h(x)$.

QUESTION 17 En déduire que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

QUESTION 18 Utilisant une fonction auxiliaire, montrer que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}_-$, et donc finalement sur $\mathbb{R}$.

On suppose dans la suite qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = f'(a) = 0$.

QUESTION 19 Montrer que $\forall x \in [a, +\infty[\,, h(x) \leq 0$. Puis que $f(x) = 0$ pour tout $x \geq a$.

QUESTION 20 Soit : $\Phi : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(a - x)$. Déterminer une fonction r continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\Phi'' + r\Phi = 0$.

QUESTION 21 En utilisant la fonction $K = \Phi^2 + (\Phi')^2$, conclure que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Problème 3

Dans tout ce problème, k est un réel donné, on note $(\mathcal{E}_k)$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_k): \quad xy'' + 2y' + kxy = 0.$$

On étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ les solutions de $(\mathcal{E}_k)$ telles que $\lim_{x \to 0^+} y(x) = 1$.

QUESTION 22 Déterminer k pour que la fonction $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ soit solution de $(\mathcal{E}_k)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On choisira, pour les deux questions suivantes, cette valeur de k.

QUESTION 23 Montrer que la fonction $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ vérifie la même équation différentielle $(\mathcal{E}_k)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

QUESTION 24 Soit y une solution de $(\mathcal{E}_k)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer qu'il existe d'uniques fonctions a, b $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\begin{cases} y(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x) \\ y'(x) = a(x)f'(x) + b(x)g'(x) \end{cases}$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $a'(x) = b'(x) = 0$.

(c) En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_k)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et la solution de $(\mathcal{E}_k)$ qui tend vers 1 quand $x \longrightarrow 0^+$.

Dans la suite on prend k quelconque.

QUESTION 25 Effectuer dans $(\mathcal{E}_k)$ le changement de fonction inconnue : $y(x) = \dfrac{1}{x}z(x)$.

QUESTION 26 En déduire toutes les solutions de $(\mathcal{E}_k)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. (on distinguera 3 cas de figure selon que $k = 0$, $k = a^2 > 0$, $k = -a^2 < 0$).

QUESTION 27 Montrer que, pour toute valeur de k, il existe une solution ayant pour limite 1 quand $x \longrightarrow 0^+$.