

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction. Si vous sautez les questions Cours-TD sans tenter d'y répondre vous seriez sanctionné.
Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

Cours TD

Exercice 1

Soit g la fonction $x \mapsto \frac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2}$.

QUESTION 1 Donner le domaine de définition de g .

QUESTION 2 Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.

QUESTION 3 Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice 2

QUESTION 4 Résoudre l'équation $\arcsin(2x) = \arccos(x)$ d'inconnue $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Fin Cours TD

Problème

Les deux parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes. Elles utilisent les deux questions du préliminaire.

Préliminaire

QUESTION 5 Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I . Pour tout $x \in J$ on pose

$$H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt.$$

Justifier pourquoi H est dérivable sur J et montrer que

$$\forall x \in J : H'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

QUESTION 6 Dans cette question, on suppose que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 :

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = a_0 + a_1 t + t\varepsilon(t)$$

avec ε continue sur \mathbb{R} et $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$

et on pose $H(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- (a) Montrer, en utilisant la définition de la limite, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x t\varepsilon(t) dt = 0$.
- (b) En déduire que H admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 et le déterminer.

Partie I

Pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on pose

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

QUESTION 7 Etudier le signe de $F(x)$ pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

QUESTION 8 Calculer la dérivée de F sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ et étudier ses variations.

QUESTION 9 Soit $x \in]0, 1[$.

- (a) Montrer que $\forall t \in [x^2, x] : \frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}$.
- (b) En déduire que $\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq F(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$.
- (c) Montrer alors que F est prolongeable par continuité en 0 et préciser sa valeur en 0.
On note toujours F la fonction ainsi prolongée.

(d) Calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x)$ puis déduire que F est dérivable à droite de 0 et donner $F'_d(0)$.

(e) Préciser graphiquement l'allure de la courbe de F au voisinage de 0.

QUESTION 10 Soit $x \in]1, +\infty[$.

(a) En s'inspirant de la démarche de la question précédente, donner un encadrement adéquat de $F(x)$.

(b) En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et la nature des branches infinies de la courbe de F au voisinage de $+\infty$.

QUESTION 11 Montrer que $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[: \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt = \ln(2)$.

QUESTION 12 En remarquant que $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$, montrer que

(a) Pour tout $x \in]1, +\infty[: x \ln(2) \leq F(x) \leq x^2 \ln(2)$.

(b) Pour tout $x \in]0, 1[: x^2 \ln(2) \leq F(x) \leq x \ln(2)$.

QUESTION 13 Montrer alors que F est prolongeable par continuité en 1 et préciser sa valeur en 1.

On note toujours F la fonction ainsi prolongée.

QUESTION 14 Montrer que F est dérivable en 1 et préciser la valeur de $F'(1)$.

QUESTION 15 Dresser le tableau de variations de F puis représenter la graphiquement. On donne $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II

Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$, on définit la fonction G_f sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[: G_f(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t} dt.$$

QUESTION 16 Montrer que G_f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

QUESTION 17 Calculer la fonction G_f pour f constante égale à 1.

QUESTION 18 Dans cette question on suppose que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$\forall t \in]0, +\infty[: f(t) = a + bt + ct^2 + t^2 \varepsilon(t)$$

avec ε continue sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varepsilon(t) = 0$.

En utilisant le résultat de la QUESTION 6, montrer que G_f admet un développement limité en 0 à droite à l'ordre 2 et le déterminer.

QUESTION 19 Montrer, en utilisant la définition de la limite, que si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_f(x) = 0$.

Dans la suite on note G la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[: G(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

QUESTION 20 Calculer $G'(x)$ et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

QUESTION 21 Ecrire le développement limité de la fonction \cos à l'ordre 2 en 0 et en déduire celui de la fonction G .

QUESTION 22 Montrer alors que G est prolongeable par continuité en une fonction dérivable, puis déterminer la position de la courbe de G par rapport à sa tangente en 0.

QUESTION 23 Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$G(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

QUESTION 24 Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = 0$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

QUESTION 25 Construire l'allure du graphe de G correspondant à l'intervalle $[0, 2\pi]$. On donne les valeurs approchées suivantes :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t} dt \simeq -0.67; \int_{\pi}^{3\pi} \frac{\cos(t)}{t} dt \simeq -0.06; \int_{3\frac{\pi}{2}}^{9\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t} dt \simeq 0.27;$$

$$\int_{2\pi}^{6\pi} \frac{\cos(t)}{t} dt \simeq 0.02; \ln 3 \simeq 1.10.$$