Devoir surveillé de Mathématiques – n° 1 –

durée: 2 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation. Si vous sautez la question de cours sans tenter d'y répondre vous seriez sanctionné.
Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

Cours TD

Exercice 1

Soient deux applications $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{i\} ; z \longmapsto \dfrac{iz+i}{z-1}$ et $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} ; x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

QUESTION 1 Montrer que f et h sont bijectives.

QUESTION 2 Déterminer, en précisant leurs natures géométriques, les ensembles $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$, $f(i\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{U} \setminus \{1\})$.

Exercice 2

Sur $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par:

$$\forall (a,b), (a',b') \in E : (a,b)\, \mathcal{R}\, (a',b') \Longleftrightarrow a + b' = a' + b.$$

QUESTION 3 Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Fin Cours TD

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ et on note $\overline{(a,b)}$ la classe du couple $(a,b) \in E$.

QUESTION 4 Donner trois éléments distincts de la classe $\overline{(0,1)}$.

On définit sur $\mathcal{F}$ une addition par:

$$\forall \overline{(a,b)}, \overline{(a',b')} \in \mathcal{F} : \overline{(a,b)} \oplus \overline{(a',b')} = \overline{(a+a', b+b')}.$$

QUESTION 5 Montrer que $\oplus$ est bien une loi de composition interne sur $\mathcal{F}$.

QUESTION 6 Montrer que $\oplus$ est commutative, associative, admet un élément neutre et que tout élément de $\mathcal{F}$ est symétrisable.

QUESTION 7 On note φ l'application $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{F}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \varphi(n) = \overline{(n,0)} & \text{si} \quad n \geq 0, \\ \varphi(n) = \overline{(0,-n)} & \text{si} \quad n < 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que φ est bijective.

(b) Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$ $\quad \varphi(n+m) = \varphi(n) \oplus \varphi(m)$.

Exercice 3

Le plan euclidien étant muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives:

$$z_A = 1 - 2i, z_B = 3 - i, z_{A'} = -2 + 4i \text{ et } z_{B'} = 5i$$

QUESTION 8 Placer ces quatres points dans le plan, et montrer que $ABB'A'$ est un rectangle.

QUESTION 9 Soit f la similtude $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$; $z \longmapsto a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ telle que $f(z_A) = z_{A'}$ et $f(z_B) = z_{B'}$.

(a) Déterminer les complexes a et b sous leurs formes algébriques.

(b) Déterminer nature et équation de l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ tels que $f(z) = z$.

(c) Représenter graphiquement (Δ) sur la même figure que les points A, B, B' et A'.

(d) Reconnaissez-vous la nature de f?

QUESTION 10 Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\bar{z} + 5 - i$$

(a) Déterminer expression complexe centre et rapport de l'homothétie h telle que $g = h \circ f$.

(b) Déduire une construction du point M' , image par g d'un point M quelconque donné du plan.