Devoir surveillé de Mathématiques – n° 8 –

durée: 4 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.
Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

TD

QUESTION 1 Justifier l'existence et calculer l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})dx.$$

QUESTION 2 Calculer le déterminant d'ordre $n \geq 2$ suivant:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Problème I

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt. \tag{1}$$

On suppose que f est non nulle et on considère un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

QUESTION 3 Montrer que $f(0) = 0$.

QUESTION 4 (a) Vérifier que, pour tout reél x, $f(x) = \dfrac{1}{f(a)} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt$.

(b) Montrer alors que f est dérivable et calculer sa dérivée.

(c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

QUESTION 5 Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \text{ et } f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

QUESTION 6 On pose $\lambda = -\dfrac{f''(a)}{f(a)}$; montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$z'' + \lambda z = 0. \tag{$\mathcal{E}_\lambda$}$$

QUESTION 7 Dans cette question, on suppose que $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.

(a) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.

(b) En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A tel que $f(x) = A\sin(\mu x)$, $x \in \mathbb{R}$. Puis justifier que $A = \dfrac{2}{\mu}$.

QUESTION 8 Dans cette question, on suppose que $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

(a) Montrer que toute solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$ est combinaison linéaire des deux fonctions:

$$C_\mu : x \longmapsto \frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{2} \text{ et } S_\mu : x \longmapsto \frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{2}.$$

(b) En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A' tel que $f(x) = A' S_\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $C_\mu(x \pm y)$ en fonction de $C_\mu(x), C_\mu(y), S_\mu(x)$ et $S_\mu(y)$, puis justifier que $A' = \dfrac{2}{\mu}$.

QUESTION 9 Si $\lambda = 0$, déterminer f .

QUESTION 10 Vérifier que les fonctions trouvées dans les trois questions précédentes vérifient bien l'équation fonctionnelle (1).

Problème II

Dans tout le problème E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ $(n = 2 \text{ ou } 3)$, muni de sa structure euclidienne usuelle. $\mathcal{B}$ désigne la base canonique qui est orthonormale.
On notera $(u \mid v)$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E.

Préliminaire

QUESTION 11 Rappeler la définition de valeur et vecteur propre d'une matrice ou d'un endomorphisme.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle spectre de f et on note $Sp(f)$, l'ensemble de ses valeurs propres. Et si λ est une valeur propre de f, $\ker(f - \lambda Id_E)$ est appelé sous espace propre de f associé à λ.

QUESTION 12 Montrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $\det(f - \lambda Id_E) = 0$.

QUESTION 13 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$ soit symétrique.

(a) Montrer que $\forall i, j \in [\![1, n]\!] : \big(f(e_i) \mid e_j\big) = a_{ij}$.

(b) En déduire que $\forall u, v \in E : (f(u) \mid v) = (u \mid f(v))$.

Etude d'un exemple

Dans cette partie, on se propose d'étudier la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

QUESTION 14 Vérifier que 0 est une valeur propre de f et déterminer $\ker(f)$.

QUESTION 15 On note F l'orthogonal de $\ker(f)$.

(a) Déterminer la dimension de F et en donner une base orthonormée $\mathcal{B}'$.

(b) Montrer que $f(F) = F$. On note f' la restriction de f à F.

(c) Ecrire la matrice A' de f' dans la base $\mathcal{B}'$. Remarquer que A' est symétrique.

(d) Déterminer le spectre et les sous espaces propre de f' .

QUESTION 16 Donner alors une base (u_1, u_2, u_3) orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f .

Dans les deux parties suivantes, on se propose de montrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n = 2 \text{ ou } 3)$ admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Cas de matrices 2x2

Dans cette partie, on suppose $n = 2$ et on considère une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, l'endomorphisme canoniquement associé à A.

QUESTION 17 Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\det(A - \lambda I_2)$ et justifier que A admet aumoins une valeur propre.

QUESTION 18 Dans cette question on suppose que f admet une seule valeur propre λ.

(a) Ecrire la matrice A en fonction de λ.

(b) Justifier alors que f admet une base orthonormée de vecteurs propres.

QUESTION 19 Dans cette question on suppose que f admet deux valeurs propres λ et μ. Soient u et v deux vecteurs propres de f associés respectivement à λ et μ.

(a) En utilisant la QUESTION (13.b.), montrer que $(u \mid v) = 0$.

(b) Conclure.

Cas de matrices 3x3

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et on considère $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$ soit symétrique.

QUESTION 20 Expliquer pourquoi f admet aumoins une valeur propre.

QUESTION 21 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de f et $F = \ker(f - \lambda Id_E)$.

(a) Montrer que $F^\perp$ est stable par f .

(b) Que peut-on dire de f si $\dim(F) = 3$?

(c) Si $\dim(F) = 2$, montrer que f admet une seconde valeur propre distincte de λ et conclure.

(d) On suppose que $\dim(F) = 1$. On considère une base orthonormée $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $F^\perp$.

  (i) Montrer que la matrice dans $\mathcal{E}$ de la restriction de f à $F^\perp$ est symétrique.

  (ii) Conclure en utilisant le cas de matrices 2x2.