

*Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.  
Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.*

## Problème I

Les deux parties du problème sont indépendantes.

### Partie A

Dans cette partie  $A$  désigne la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A$ .

**QUESTION 1** Montrer que la matrice  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

**QUESTION 2** On note  $N$  la matrice  $A - I_3$  et  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $N$ . Calculer le rang de  $N$  et déterminer une base de  $\ker(g)$ .

**QUESTION 3** Calculer  $N^2$  et  $N^3$  puis montrer que  $N$  est semblable à la matrice:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on déterminera une matrice  $P \in GL_3(\mathbb{R})$  telle que  $N = PJP^{-1}$ .

**QUESTION 4** Donner l'expression de  $A^{-1}$  en fonction de  $N$ .

**QUESTION 5** On pose  $M = N^2 - N$ . Dédurre de la question précédente une matrice  $K$  telle que:

$$M = PKP^{-1}.$$

**QUESTION 6** Montrer que les matrices  $M$  et  $N$  sont semblables.

**QUESTION 7** Montrer alors que les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  sont semblables.

### Partie B

Dans toute cette partie  $A$  désigne la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à  $A$ .

**QUESTION 8** Calculer  $A^2$  et en déduire que:  $\mathbb{R}^2 = \ker(f) \oplus \ker(f - Id_{\mathbb{R}^2})$ .

**QUESTION 9** Déterminer une matrice  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

On définit l'application  $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par:

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \Phi(M) = AM - MA.$$

**QUESTION 10** Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**QUESTION 11** Calculer  $\Phi^3$  en fonction de  $\Phi$ .

**QUESTION 12** Rappeler la dimension de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  comme espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et donner sa base canonique.

**QUESTION 13** Ecrire la matrice  $\Omega$  de  $\Phi$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**QUESTION 14** Calculer le rang de la matrice  $\Omega$  et en déduire  $\dim \ker(\Phi)$  puis une base de  $\ker(\Phi)$ .

On note  $E_1$  et  $E_2$  les sous espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  définis par:

$$E_1 = \ker(\Phi - Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) \quad \text{et} \quad E_2 = \ker(\Phi + Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}).$$

**QUESTION 15** En résolvant deux systèmes linéaires déterminer une base de  $E_1$  et une base de  $E_2$ .

**QUESTION 16** Déterminer une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dans laquelle la matrice de  $\Phi$  est diagonale et écrire cette matrice diagonale.

## Problème II

Dans tout le problème  $f$  et  $g$  désignent les fonctions définies pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  par:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

**QUESTION 17** Montrer que  $f$  et  $g$  admettent un prolongement par continuité en 0 et donner alors ces prolongements.

Dans toute la suite ces prolongements seront notés encore  $f$  et  $g$  et sont donc définies et continues sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $G$  et  $F$  les fonctions définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

**QUESTION 18** Etudier les variations de  $G$  sur  $\mathbb{R}$  et Justifier pourquoi la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$  existe dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

**QUESTION 19** On se propose de montrer dans cette question que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$  est finie.

- (a) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$  :  $g(x) \leq 1$ .  
 (b) En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  :  $G(x) \leq 2$  et que donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \ell \leq 2.$$

**QUESTION 20** Soient deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $0 < a < b$ . Montrer que l'on a:

$$\int_a^b f(t)dt = \left[ \frac{1 - \cos t}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \left[ \frac{1 - \cos t}{t} \right]_a^{\frac{b}{2}} + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} g(t)dt.$$

**QUESTION 21** En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  :

$$F(x) = \frac{1 - \cos x}{x} + G\left(\frac{x}{2}\right).$$

et que donc on a:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$ .

**QUESTION 22** Soient deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ , et  $h$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ . A l'aide d'intégrations par parties, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b h(t) \sin(xt) dt = 0.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $h_n$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par:

$$h_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \quad \text{et} \quad h_n(0) = 2n+1.$$

Remarquons que  $h_n$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n(t) dt$$

**QUESTION 23** Calculer  $I_0$  puis, en calculant  $I_{n+1} - I_n$  déduire  $I_n$ .

**QUESTION 24** Soit  $h$  la fonction définie sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  par:

$$h(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$

- (a) Donner un développement de  $h$  en 0 à l'ordre 1.  
 (b) En déduire que  $h$  admet un prolongement continu et dérivable à  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .  
 On le note encore  $h$ . Préciser  $h(0)$  et  $h'(0)$ .  
 (c) Montrer que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .  
 (d) En déduire la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) h(t) dt$ .

**QUESTION 25** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt,$$

la fonction  $\frac{\sin((2n+1)t)}{t}$  étant prolongée par continuité en 0.

- (a) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ .  
 (b) A l'aide d'un changement de variable convenable, déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ .