

*Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.
Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.*

Exercice

Dans cet exercice E désigne le \mathbb{R} – espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes à coefficients réels de degrés ≤ 4 . On note φ_1 , φ_2 et φ_3 les trois formes linéaires définies sur E par:

$$\forall P \in E : \varphi_1(P) = P(1), \quad \varphi_2(P) = P'(1) \quad \text{et} \quad \varphi_3(P) = P''(1).$$

QUESTION 1 Montrer que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre.

QUESTION 2 Soit $G = \ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_2) \cap \ker(\varphi_3)$. Donner la dimension de G en déterminant une base.

QUESTION 3 On pose $K = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid (X^2 + 1) \text{ divise } P\}$. Montrer que K est un sous espace vectoriel de E et que $E = G \oplus K$.

Problème

Dans tout le problème E désigne l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E défini par:

$$f(e_1) = 3e_1 + e_2 \quad f(e_2) = -2e_1 \quad f(e_3) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

Partie I

QUESTION 4 Montrer que f est bijectif.

QUESTION 5 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$. Etudier selon $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de f_λ .

QUESTION 6 On pose $E_1 = \ker(f - Id_E)$ et $E_2 = \ker(f - 2Id_E)$. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous espaces vectoriels E_1 et E_2 .

QUESTION 7 Est ce que $E = E_1 \oplus E_2$?

QUESTION 8 Déterminer le vecteur u_1 de E_1 dont la première composante vaut 1 et le vecteur u_2 de E_2 dont la deuxième composante vaut 1.

QUESTION 9 Soit $u_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est base de E .

QUESTION 10 Ecrire les vecteurs e_1 , e_2 et e_3 dans la base \mathcal{C} .

QUESTION 11 Ecrire $f(u_3)$ dans la base \mathcal{C} . Et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $f^n(u_3) = \alpha_n u_2 + 2^n u_3$. On donnera α_1 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n .

QUESTION 12 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \alpha_n = n2^{n-1}$.

QUESTION 13 Donner alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les expressions des vecteurs $f^n(e_1)$, $f^n(e_2)$ et $f^n(e_3)$ dans la base \mathcal{B} .

Partie II

On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble $\{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

QUESTION 14 Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

QUESTION 15 Montrer que pour tout $g \in \mathcal{C}(f)$, $g(E_1) \subset E_1$ et $g(E_2) \subset E_2$.

QUESTION 16 Pour g appartenant $\mathcal{L}(E)$, montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

(a) $g \in \mathcal{C}(f)$.

(b) Il existe des réels a, b, c tels que

$$g(u_1) = au_1 \quad g(u_2) = bu_2 \quad g(u_3) = cu_2 + bu_3$$

QUESTION 17 Soit donc $g \in \mathcal{C}(f)$ et des réels a, b, c vérifiant la condition (b) ci-dessus. Donner les expressions des vecteurs $g(e_1)$, $g(e_2)$ et $g(e_3)$ dans la base \mathcal{B} en fonction de a, b et c .

QUESTION 18 Déterminer alors une base de $\mathcal{C}(f)$ ainsi que sa dimension.