

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction. Si vous sautez la question de cours sans tenter d'y répondre vous serez sanctionné.

Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

## Questions de cours TD

### Exercice 1

Soit  $(G, .)$  un groupe, on appelle centre de  $G$  l'ensemble

$$\mathcal{Z}(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G : xy = yx\}$$

**QUESTION 1** Montrer que  $\mathcal{Z}(G)$  est un sous groupe de  $G$ .

**QUESTION 2** Que dire de  $\mathcal{Z}(G)$  si  $G$  est abélien ?

**QUESTION 3** Dans cette question,  $G$  est supposé engendré par deux de ses éléments:  $a$  et  $b$ .

- Rappeler la forme des éléments de  $G$ .
- On note  $H$  le sous groupe de  $G$  engendré par  $a$  et  $K$  celui engendré par  $b$ . Montrer que  $H \cap K \subset \mathcal{Z}(G)$ .

**QUESTION 4** Pour tout  $a \in G$ , on note  $i_a : G \longrightarrow G, x \longmapsto axa^{-1}$ .

- Montrer que  $i_a$  est un automorphisme de groupes.
- Montrer que  $\varphi : G \longrightarrow \text{Aut}(G), a \longmapsto i_a$  est un morphisme de groupes et déterminer son noyau.  $\text{Aut}(G)$  désigne le groupe des automorphismes de  $G$ .

**QUESTION 5** Dans cette question, on considère un anneau  $(A, +, \times)$ . On appelle le centre de  $A$  l'ensemble:

$$\mathcal{C} = \{x \in A \mid \forall y \in A : xy = yx\}.$$

Montrer  $\mathcal{C}$  est un sous anneau de  $A$ .

### Exercice 2

Sur  $A = \mathbb{R}^2$  muni de l'addition usuelle, i.e :

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

on définit la loi  $*$  par

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

**QUESTION 6** Montrer que  $(A, +, *)$  est un anneau commutatif.

**QUESTION 7** Chercher les diviseurs de 0 de l'anneau  $A$ .

**QUESTION 8** On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow A \\ f &\longmapsto (f(0), f'(0)). \end{aligned}$$

- Montrer que  $\varphi$  est un homomorphisme d'anneaux.
- $\varphi$  est-il surjectif ?
- Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Montrer que  $f$  s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction  $g \in \ker(\varphi)$  et d'une fonction affine.

### Problème

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On définit dans tout le problème la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  par :

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_{n+1} = (x_n - 1)^2 \text{ pour } n \geq 1. \end{cases}$$

On notera  $t_0$  le nombre  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ , il vaut 0,38 à  $10^{-2}$  près et  $t_1$  le nombre  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ , il vaut 2,62 à  $10^{-2}$ .

## Partie I

Dans cette partie on suppose que  $t \in ]t_1, +\infty[$ .

**QUESTION 9** Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est strictement croissante à valeur dans  $]t_1, +\infty[$ .

**QUESTION 10** En déduire la limite de la suite  $(x_n)_n$ .

**QUESTION 11** Dans cette question, on définit la suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* : z_n = \frac{1}{2^n} \ln(x_n)$$

- (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}^* : z_{n+1} - z_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(1 - \frac{1}{x_n}\right)$ .
- (b) En déduire que la suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  est convergente. On notera  $\alpha$  sa limite.
- (c) Montrer que  $z_n = \alpha + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ .
- (d) En déduire un équivalent simple de  $x_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

## Partie II

Dans cette partie on suppose que  $t \in [0, 1]$ . Il est facile de voir que, pour tout  $t \in [0, 1]$ , la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est à valeur dans  $[0, 1]$ .

La suite  $(y_n)_{n \geq 1}$  désignera sa moyenne de Césaro définie par:

$$\forall n \in \mathbf{N}^* : y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Il est connu et on l'admet, que si la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  converge vers une limite, la suite  $(y_n)_{n \geq 1}$  converge vers la même limite.

**QUESTION 12** On suppose que  $(x_n)_{n \geq 1}$  est convergente, donner sa limite  $\ell$ .

**QUESTION 13** On suppose dans cette question que  $t \neq t_0$ , et on se propose de montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est divergente.

- (a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $x_n \neq t_0$ .

- (b) On suppose par absurde que  $(x_n)_{n \geq 1}$  est convergente et donc de limite  $\ell$ . On considère alors la suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  définie par:

$$\forall n \in \mathbf{N}^* : z_n = x_n - \ell$$

- (i) Calculer alors la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n}$ .
- (ii) Remarquer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$  et prouver que cela implique que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$ .

- (c) Conclure.

**QUESTION 14** On définit  $f$  et  $g$  fonctions de  $[0, 1]$  dans lui même par:

$$f(x) = (x-1)^2 \quad \text{et} \quad g = f \circ f.$$

- (a) Dessiner le graphe de la fonction  $g$  (dans un repère orthonormé unité: 4 cm), en précisant les variations, la position du graphe par rapport à la droite ( $y = x$ ) ainsi que les points d'intersection avec cette droite.
- (b) Pour cette question, on peut se contenter d'une argumentation basée sur le graphe.  
Montrer, en précisant leurs limites selon les valeurs de  $t \in [0, 1]$ , que les suites extraites  $(x_{2n})_{n \geq 1}$  et  $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$  sont convergentes pour tout  $t \in [0, 1]$ .
- (c) En déduire que  $(y_{2n})_{n \geq 1}$  et  $(y_{2n+1})_{n \geq 0}$  sont convergentes et identifier leur limite commune en fonction de  $t$ .
- (d) Conclure que  $(y_n)_{n \geq 1}$  est convergente pour toute valeur de  $t \in [0, 1]$ .

## Partie III

Dans cette partie, on considère un réel  $\lambda \in \mathbf{R}^* \setminus \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbf{N}^* \right\}$  et on écrit

$1 - \frac{1}{\lambda} = a$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  par:

$$u_1 = \frac{1}{1-\lambda} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 : u_n = \frac{1}{\left(1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{1}{n}\right)} u_{n-1}$$

Avec ces hypothèses la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est bien définie et vérifie  $u_n \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ .

**QUESTION 15** Montrer que  $\ln |u_n| - \ln |u_{n-1}| = -\frac{a}{n} + \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ .

**QUESTION 16** Que dire de la limite de la suite  $|u_n|$  si  $a < 0$  ?

On suppose que  $a > 0$  et on définit la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  par:

$$\forall n \in \mathbf{N}^* : v_n = \ln |u_n| + a \ln n$$

**QUESTION 17** Calculer en fonction de  $a$  la limite:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1)(v_n - v_{n-1})$ .

**QUESTION 18** En déduire qu'il existe une constante  $A > 0$  tel que

$$|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}.$$