Devoir surveillé de Mathématiques – n° 3 –

durée: 4 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation. Si vous sautez la question de cours sans tenter d'y répondre vous seriez sanctionné.

Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

Cours TD

QUESTION 1 (Question de cours)
Énoncer puis démontrer le théorème de Rolle pour une fonction

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$a < b$ sont deux réels.

QUESTION 2
Soit f une fonction 2 fois dérivable sur l'intervalle $I =]0, 4[$ tel que

$$f(1) = f(2) = f(3) = 5.$$

Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que $f''(d) = 0$.

QUESTION 3
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable, telle que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + f'(x) \right) = l \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.
(ind: Considérer $g : x \longmapsto e^x \left(f(x) - l \right)$, utiliser les hypothèses et le TAF).

QUESTION 4
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

QUESTION 5
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f'(x_0) = 0$ alors f présente un minimum global en x_0.

QUESTION 6
Déterminer selon $n \in \mathbb{N}$ le reste de la division euclidienne par 7 de

$$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^{n} + 2.$$

QUESTION 7
Résoudre en entiers relatifs l'équation:

$$11x + 56y = 12.$$

QUESTION 8
Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + 36n + 9$ soit divisible par 17.

Problème

Dans tout le problème on considère la suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} : P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} x^k.$$

Ainsi $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1 + x + x^2$ et $P_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. Il est acquis et on l'admet que:

$$\forall x \neq 1 : P_n(x) = \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction

$$f : x \longmapsto f(x) = \frac{1}{1 - x}$$

sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{C}_n$ la courbe de P_n sur ce même intervalle.

QUESTION 9
Étudier le signe de $P_1(x) - f(x)$ et déduire les positions relatives de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}_1$ sur $]-\infty, 1[$.

QUESTION 10
Étudier les variations de chacunes des fonctions f et P_1 et tracer dans un même repère les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ chacune avec une couleur différente.

QUESTION 11
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

(a) Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, $P_n(x) > 1$.

(b) Pour tout $x \in [-1, 0]$, $0 < P_n(x) \leq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $b_n = \inf \{P_n(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

QUESTION 12
Justifier l'existence de b_n et montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : b_n > 0.$$

QUESTION 13
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, préciser les valeurs de $P_n(1)$, $P_n(0)$ et $P_n(-1)$ et justifier l'existence d'un réel $a_n \in]-1, 0[$ tel que $P_n'(a_n) = 0$.

QUESTION 14
Calculer $P_n'(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et préciser les valeurs de $P_n'(1)$, $P_n'(0)$ et $P_n'(-1)$.

QUESTION 15
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = 2nx^{2n+1} - (2n+1)\, x^{2n} + 1.$$

(a) Étudier le signe de la dérivée et dresser le tableau de variations de la fonction g_n sur $]-\infty, 1[$.

(b) Donner l'allure représentative de la fonction g_n relative à l'intervalle $]-\infty, 1[$.

(c) Remarquer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$P_n'(x) = \frac{g_n(x)}{(1-x)^2}$$

et montrer que la fonction P_n' est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

QUESTION 16
Déduire de ce qui précède que a_n est l'unique réel tel que $P_n'(a_n) = 0$ et que $P_n(a_n) = b_n$.

QUESTION 17
Étudier le signe de $P_n(x) - f(x)$ et déduire les positions relatives de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}_n$ sur $]-\infty, 1[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

QUESTION 18
Étudier le signe de $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ et déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ avec $\mathcal{C}_{n+1}$ sur $]-\infty, 1[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

QUESTION 19
Montrer que la suite $(b_n)_n$ est strictement décroissante, i.e:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : b_{n+1} < b_n.$$

QUESTION 20
Dresser le tableau de variations de P_n sur $]-\infty, 1[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et tracer dans un même repère les trois courbes $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ chacune avec une couleur différente, on pourra supposer que $a_n > a_{n+1}$.

QUESTION 21 (Question facultative)
Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.