

*Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction. Si vous sautez la question de cours sans tenter d'y répondre vous seriez sanctionné.*

*Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.*

## Cours TD

### 1. QUESTION DE COURS:

Démontrer le lemme de cours suivant:

LEMME : Soient  $I, J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow J$  croissante.  
Si  $f$  est surjective alors elle est continue.

On rappelle que puisque  $f$  est croissante alors elle admet, en tout point  $t \in I$ , une limite à droite et une limite à gauche vérifiant:

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \leq f(t) \leq \lim_{x \rightarrow t^+} f(x).$$

### EXERCICE 1

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Calculer le nombre de couples  $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$  tels que  $X \cup Y = E$ .
- En déduire le nombre de couples  $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$  tels que  $X \cap Y = \emptyset$ .

### EXERCICE 2

4. Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan euclidien d'affixes respectifs  $z$  et  $z'$ . Exprimer la condition  $\vec{u} \perp \vec{v}$  (i.e:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ) en fonction de  $z$  et  $z'$ .

5. Soit  $z \in \mathbb{C}^*$  affixe d'un point  $M$ , et soient  $P$  et  $Q$  les points d'affixes les deux racines carrées de  $z$  dans  $\mathbb{C}$ .

- Caractériser géométriquement l'ensemble des points  $M$  tels que

$$(MP) \perp (MQ).$$

- Quels sont les lieux géométriques correspondants pour  $P$  et  $Q$ ?

## Problème

Le but du problème est l'étude globale et locale d'une fonction un peu particulière.

### Partie I: Préliminaire

Dans tout le problème  $f$  désigne la fonction définie sur  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3\}$  par:

$$f(t) = \frac{1}{t-1} + \frac{2}{t-2} + \frac{3}{t-3}$$

6. Etudier les variations de  $f$  et tracer son graphe dans un repère orthonormée. On précisera en particulier les limites aux bornes et les asymptotes.

7. On note  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $x_1 < x_2$  les deux racines de l'équation  $f(x) = 0$ . Calculer ces deux racines.

### Partie II: Etude globale

Pour tout  $x \in \mathcal{D}$  on pose:

$$F(x) = \sup \{t \in \mathcal{D} \mid f(t) = f(x)\}$$

- Justifier soigneusement que  $F(x)$  est bien définie pour tout  $x \in \mathcal{D}$ .
- Préciser  $F(0)$  sur le graphe de  $f$ .
- Calculer  $F(x_1)$  et  $F(x_2)$ .
- Montrer que  $\forall x \in [x_2, +\infty[ \setminus \{3\} : F(x) = x$  et donner le prolongement de  $F$  par continuité en 3. On conservera la même notation  $F$  pour tout prolongement de  $F$ .
- Dans cette question on se propose d'étudier  $F$  sur  $]2, x_2[$ .
  - Montrer soigneusement que  $F$  est strictement croissante sur  $]2, x_2[$  et que

$$F(]2, x_2[) = ]3, +\infty[.$$

b. Conclure que  $F$  est continue sur  $]2, x_2[$  et qu'elle est prongable par continuité en 2.

13. Faire le même raisonnement sur chacun des intervalles  $[x_1, 2]$  et  $]1, x_1[$  et conclure que  $F$  est continue strictement croissante sur chacun de ces intervalles, qu'elle est prolongeable par continuité en 1 et qu'on a :

$$F([x_1, 2]) = [x_2, 3] \text{ et } F(]1, x_1[) = ]3, +\infty[.$$

14. Enfin faire le même raisonnement sur  $] -\infty, 1]$  et montrer que  $F$  est continue strictement croissante sur  $] -\infty, 1]$  et que

$$F(]-\infty, 1]) = ]x_2, 3] \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = x_2.$$

### Partie III: Etude locale

Dans cette partie on se propose d'étudier  $F$  au voisinage de 1 et 2.

15. Montrer les développements asymptotiques de  $f$  suivants:

a. Au voisinage de 1 :  $f(t) = \frac{1}{t-1} - \frac{7}{2} + O(t-1).$

b. Au voisinage de 2 :  $f(t) = \frac{2}{t-2} - 2 + O(t-2).$

c. Au voisinage de 3 :  $f(t) = \frac{3}{t-3} + \frac{5}{2} + O(t-3).$

16. Dans cette question on prend  $x$  dans un voisinage de 1 et on pose

$$t = F(x).$$

a. Montrer que

$$\frac{3}{t-3} + \frac{5}{2} = \frac{1}{x-1} - \frac{7}{2} + O(x-1).$$

b. En déduire un DL de  $F$  au voisinage de 1 à l'ordre 2.

17. Dans cette question on prend  $x$  dans un voisinage de 2 et on pose

$$t = F(x).$$

a. Montrer que

$$\frac{3}{t-3} + \frac{5}{2} = \frac{2}{x-2} - 2 + O(x-2).$$

b. En déduire un DL de  $F$  au voisinage de 2 à l'ordre 2.

18. Résumer les variations de  $F$  dans un tableau et donner l'allure de son graphe. On précisera les équations des tangentes aux points d'abscisses 1 et 2 ainsi que la position de la courbe par rapport à celles-ci.