

# Devoir surveillé de Mathématiques – n° : 1 –

Mardi 16 Octobre. Durée: 4 heures

## Cours TD

### Exercice 1

a. Rappeler la définition d'une relation d'ordre et en donner trois exemples en précisant à chaque fois s'il s'agit d'ordre total ou partiel.

b. Soit  $(E, \ll)$  un ensemble ordonné. Dans  $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ , on définit la relation  $\mathcal{S}$  par

$$X\mathcal{S}Y \iff [X = Y \text{ ou } (\forall x \in X, \forall y \in Y : x \ll y)]$$

(i) Vérifier que c'est une relation d'ordre.

(ii) Si on suppose  $E$  totalement ordonné. Est-ce que  $\mathcal{S}$  est totale?

**Exercice 2** Soit  $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$  pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \setminus \{0\}$ .

a. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.

b. Déterminer un DL de  $f$  en 0 à l'ordre 4.

c. Etudier la dérivabilité en 0 du prolongement de  $f$ .

d. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction ainsi la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

**Exercice 3** Calculer :

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$$

et donner un équivalent simple de  $\ell - \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

---

## Problème

Pour tout réel  $\theta \in ]0, \pi[$ , on pose

$$\mathcal{A}(\theta) = \{|\sin(n\theta)| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

### Préliminaire

1. Montrer que  $\mathcal{A}(\theta)$  est borné admettant une borne supérieure  $\alpha \in ]0, 1]$ .

2. Calculer  $\alpha$  successivement pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{\pi}{100}$ .

### Partie I

Dans cette partie, on suppose que  $\theta = \pi \frac{p}{q}$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ .

3. Montrer que dans le cas  $q$  pair et  $p$  impair  $\alpha$  vaut 1.

4. Montrer que dans le cas général, il existe un entier  $n$  tel que  $|\sin(n\theta)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  et en déduire que  $\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . (Indication: étudier selon la position de  $\theta$  par rapport à  $\frac{\pi}{3}$  et remarquer qu'on peut se ramener au cas  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ ).

## Partie II

Dans cette partie, on suppose que  $\theta = \pi z$  avec  $z$  **irrationnel**, i.e:  $z \in ]0, 1[ \setminus \mathbb{Q}$  et on se propose de montrer que  $\alpha = 1$ .

Pour cela **on raisonne par absurde** et **on suppose que**  $\alpha < 1$ .

On note  $\varepsilon$  le réel tel que:

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\pi\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right)\right) = \alpha,$$

et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on pose

$$f(x) = x - E(x),$$

$E(x)$  désignant la partie entière de  $x$ .

5. Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R} : 0 \leq f(x) < 1$  et que  $f$  est 1-périodique.

6. Montrer qu'un réel  $x$  est rationnel si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $f(nx) = 0$ .

7. Montrer que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z} : f(px) = f(pf(x)).$$

Dans toute la suite on pose  $x = \frac{z}{2}$  c'est donc un **irrationnel**. On pose

$$\mathcal{F} = \{f(nx) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

et on note  $a = \inf \mathcal{F}$ .

8. On suppose par absurde que  $a > 0$ .

a. Montrer que:  $\exists p \in \mathbb{N} \mid 1 \leq pa < a + 1$ .

b. Justifier l'existence de  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que:  $a \leq f(qx) < \frac{a+1}{p}$ .

c. En déduire que  $E(pf(qx)) \geq 1$  et que  $f(pf(qx)) < a$ .

d. Mettre en évidence une contradiction et conclure.

9. Montrer que:  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \mid 0 < f(n_0x) < \varepsilon$ .

10. Montrer que:  $\exists k_0 \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{4} - \varepsilon < k_0 f(n_0x) \leq \frac{1}{4} - \varepsilon + f(n_0x)$ .

11. En déduire que:  $\frac{1}{4} - \varepsilon < f(k_0 n_0 x) < \frac{1}{4}$ .

12. Déterminer en fonction de  $n_0$  et  $k_0$  deux entiers  $n$  et  $k$  tels que:

$$\frac{1}{4} - \varepsilon < n \frac{z}{2} - k < \frac{1}{4}$$

et aboutir à une **contradiction**.

## Conclusion

13. Calculer

$$\inf \{ \sup \mathcal{A}(\theta) \mid \theta \in ]0, \pi[ \}.$$