

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Les calculatrices non programmables sont autorisées.

## Problème 1

### Partie I

Dans cette partie  $E$  est le  $\mathbb{R}$  – espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ . On définit les applications

$$\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto (x + y, x + y) \end{array} \quad f : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto (2x + y, x + 2y) \end{array} .$$

1. Montrer que les applications  $\varphi$  et  $f$  sont linéaires.
2. Déterminer les noyau et image de  $\varphi$  : on donnera, si c'est possible une famille génératrice simple de chacun d'entre eux.  $\varphi$  est-elle injective? surjective?
3. Montrer que, pour tout entier  $k \geq 1$  :  $\varphi^k = 2^{k-1}\varphi$ .  
(Ici  $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k \text{ fois}}$ ).
4. Vérifier que  $f = \varphi + Id_E$ . En déduire pour tout  $n \geq 1$ , une expression de  $f^n$  en fonction de  $\varphi$  et  $Id_E$ .
5. Calculer  $f^2 - 4f + 3Id_E$ .

### Partie II

Dans cette partie  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$  – espace vectoriel non nul de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant

$$f^2 - 4f + 3Id_E = 0 \quad (\text{ici } 0 \text{ signifie } 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ l'application nulle}).$$

6. Montrer que  $f$  est bijective et donner  $f^{-1}$  en fonction de  $f$  et  $Id_E$ .

On note  $g$  et  $h$  les éléments de  $\mathcal{L}(E)$  définie par

$$g = f - 3Id_E \quad \text{et} \quad h = f - Id_E .$$

7. Déterminer  $g \circ h$  et  $h \circ g$ . En déduire que  $\text{Im}(g) \subset \ker(h)$  et  $\text{Im}(h) \subset \ker(g)$ .

8. Montrer que  $Id_E$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de  $g$  et  $h$ . En déduire que  $E = \text{Im}(g) + \text{Im}(h)$ .

9. On pose  $G = \ker(g)$  et  $H = \ker(h)$ . Montrer que  $E = G \oplus H$ .

On note  $p$  la projection sur  $G$  parallèlement à  $H$ , et  $q$  la projection sur  $H$  parallèlement à  $G$ .

10. Faire un schéma illustrant cette situation et faisant apparaître les espaces  $G, H$ , un vecteur  $\vec{x}$  quelconque,  $p(\vec{x})$  et  $q(\vec{x})$ .

11. Montrer que  $p \circ q = q \circ p = 0$ .

12. Montrer que  $f = 3p + q$ . En déduire l'expression de  $f^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en fonction de  $p$  et  $q$ .

13. Vérifier que  $p$  et  $q$  sont des combinaisons linéaires de  $f$  et de  $Id_E$ .

### Partie III

On reprend les hypothèse de la Partie I:  $E = \mathbb{R}^2$  et l'application  $f$  donnée par

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto (2x + y, x + 2y) \end{array} .$$

14. Peut-on appliquer les résultats de la Partie II à  $f$ ? Justifier.

15. Montrer qu'il existe deux projecteurs  $p$  et  $q$  de  $E$ , que l'on donnera, et des constantes réelles  $a$  et  $b$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f^n = a^n p + b^n q .$$

16. Trouver à l'aide de la Partie II, l'expression analytique de  $f^n$ . Ce résultat est-il cohérent avec le résultat de la Partie I?

## Problème 2

Dans tout le problème  $x$  désigne un nombre réel dans  $] -1, 1 ]$ .

17. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer l'égalité:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

18. En déduire l'égalité

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt.$$

19. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt = 0$ .

20. En déduire que la série  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$  est convergente de somme  $\ln(1+x)$ .

21. Justifier les égalités

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad (1)$$

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \quad (2)$$

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite décroissante de nombres réels qui converge vers 0.

22. Justifier que la série  $\sum (-1)^{n-1} u_n$  est convergente.

On note  $S$  sa somme et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k.$$

23. Démontrer que la suite  $(S_{2n})_{n \geq 1}$  est croissante et que la suite  $(S_{2n-1})_{n \geq 1}$  est décroissante.

24. Montrer que  $S$  vérifie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}.$$

et en déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$|S - S_n| \leq u_n.$$

25. Déterminer un entier naturel  $N$  tel que  $\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  soit une valeur approchée de  $\ln(2)$  à  $10^{-3}$  près.

Dans la suite, on se propose de calculer une valeur approchée de  $\ln(2)$  à  $10^{-3}$  près en utilisant les sommes partielles  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}.$$

26. Justifier l'inégalité

$$0 \leq R_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

27. Déterminer un entier naturel  $N'$  tel que  $\sum_{n=1}^{N'} \frac{1}{n2^n}$  soit une valeur approchée de  $\ln(2)$  à  $10^{-3}$  près.

28. Comparer  $N'$  avec  $N$  (de la question (25)).