

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.
Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Problème 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , en particulier en $t = 0$.
- Calculer $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et étudier l'existence de $f''(0)$.
- Étudier la convexité de f sur \mathbb{R} .
- Dresser le tableau de variations et tracer l'allure de la courbe de f dans repère orthonormé (unité 2 cm).
- On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n -ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

où P_n est une fonction polynôme.

- Trouver P_1 et P_2 .
 - Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1} , P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Problème 2

Soit n un entier naturel. Si n est non nul, on note f_n la fonction définie sur \mathbb{R} qui associe à un réel x

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x} - \frac{x}{n}$$

On note f_0 la fonction définie sur \mathbb{R} qui associe à un réel x

$$f_0(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

Généralités sur f_n

Soit n un entier naturel fixé.

- f_n est-elle paire ? f_n est-elle impaire ? On justifiera sa réponse.
- f_n est-elle 2π -périodique ?
- Montrer qu'il suffit d'étudier f_n sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe sur \mathbb{R} tout entier. On justifiera sa réponse.

Étude de la fonction f_0

- Étudier la dérivabilité de f_0 sur \mathbb{R} . Déterminer l'expression de sa dérivée.
- Étudier le signe de la dérivée de f_0 sur $[0, \pi]$.
- Déterminer le tableau de variations de $[0, \pi]$ et tracer l'allure de la courbe de f_0 sur \mathbb{R} dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
- Déterminer les valeurs maximales et minimales atteintes par $f_0(x)$ quand x parcourt \mathbb{R} . En déduire la valeur maximale atteinte par $|f_0(x)|$ lorsque x parcourt \mathbb{R} .

Utilisation d'une primitive de f_0

- Déterminer une primitive de f_0 sur \mathbb{R} . En déduire

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{2 - \cos t} dt$$

Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(x) + \frac{\sin x}{2 - \cos x} y(x) = 2 \sin x$$

- Résoudre sur \mathbb{R} l'équation sans second membre (H) associée à (E) .
- Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto a \cos x + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre (E) sur \mathbb{R} .
- Trouver la fonction h définie sur \mathbb{R} , solution de (E) qui vérifie $h(0) = 1$.

Étude de la fonction $g : x \mapsto \frac{\sin x}{x(2 - \cos x)}$

18. Déterminer le domaine de définition de g .
19. Montrer que g admet une limite finie l en 0. On prolonge g par continuité en posant $g(0) = l$.
20. Déterminer le développement limité en 0 d'ordre 3 de g ainsi prolongée.
21. Montrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.
On admet que g est dérivable sur $]0, \pi]$ et que pour tout x de $]0, \pi]$, $g'(x)$ est strictement négatif.
22. Montrer que g est une bijection entre $[0, \pi]$ et un ensemble I à définir. On notera h sa réciproque.

Étude d'une suite qui annule f_n

Soit n un entier naturel non nul.

23. Montrer que si a est un réel strictement positif qui annule f_n , alors a appartient à l'intervalle $[0, n\sqrt{3}]$.
24. Montrer qu'il existe un unique réel x_n appartenant à $[0, \pi]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
25. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Problème 2

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qu'on suppose majorée de classe \mathcal{C}^2 dans tout le problème.

Partie I :

Dans cette partie (I) on suppose f convexe positive.

26. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[: \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = 0$.
27. En déduire que:
- (a) f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
- (b) Et que f possède une limite positive en $+\infty$.
28. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[: f'(x) \leq 0$, et qu'il existe $\alpha \leq 0$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha$, et qu'en plus : $\forall x \in [0, +\infty[: f'(x) \leq \alpha$.
29. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[: f(x) \leq f(0) + \alpha x$.
30. En déduire que $\alpha = 0$. (Indication: Raisonner par l'absurde et utiliser **Question 27.b.**)

Partie II :

On suppose l'existence d'un réel $a > 0$, tel que:

$$\forall x \in [0, +\infty[: 0 \leq af(x) \leq f''(x).$$

31. Montrer que f est décroissante.
32. Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.
33. Soit $\beta \geq 0$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta$.
- (a) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[: f'(x) \leq f'(0) + a\beta x$.
- (b) En déduire que $\beta = 0$. (Indication: Raisonner comme en **Question 30**.)
34. Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[: f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$.