

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1

Dans toute la suite le plan euclidien \mathbb{R}^2 est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

QUESTION 1 Tracer les coniques d'équations cartésiennes suivantes, en précisant la nature et les éléments (excentricité, foyer et directrices) de chacune d'elles:

(a) $x + 2y^2 = 1$.

(b) $x^2 + 2y^2 = 4$.

(c) $2x^2 - y^2 = 1$.

QUESTION 2 Discuter selon le paramètre $m \in \mathbb{R}$, la nature de la courbe d'équation

$$mx^2 + 4mx + (m - 1)y^2 + 2 = 0.$$

QUESTION 3 Etudier et tracer la courbe donnée, en polaire, par

$$r = \frac{2}{2 + \cos \theta}.$$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^x} dx$.

QUESTION 4 Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx$ et en déduire la valeur de

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx.$$

QUESTION 5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

QUESTION 6 Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire sans calcul supplémentaire la relation:

$$\frac{1}{2} (I_n + I_{n+1}) \leq I_n \leq \frac{1}{2} (I_{n-1} + I_n).$$

QUESTION 7 Calculer la valeur de $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n .

QUESTION 8 Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ et en déduire un équivalent de I_n .

Exercice 3

Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x} - 1 & \text{si } x \in] -\frac{1}{2}, 0[\cup] 0, +\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

QUESTION 9 Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f(x)$ en 0.

QUESTION 10 Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

QUESTION 11 Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

QUESTION 12 Étudier les variations de f .

QUESTION 13 Montrer que f s'annule, sur son domaine, en un unique point $\alpha \in]1, 2[$.

QUESTION 14 Utiliser la méthode de dichotomie pour trouver une valeur approchée de α à 10^{-1} près. (On utilisera une calculatrice et on présentera les calculs sur la copie).

QUESTION 15 Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Étude d'une suite convergeant vers α

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et pour tout n dans \mathbb{N} :

$$u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$$

QUESTION 16 Vérifier que u_n est **bien défini** pour tout n dans \mathbb{N} .

QUESTION 17 On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Que vaut alors sa limite ℓ ?

QUESTION 18 On suppose que u_0 est dans l'intervalle $]0, \alpha]$.

- Montrer que, alors, pour tout n , $u_n \in]0, \alpha]$.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers α .
- Montrer, de manière analogue, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers α si on suppose u_0 dans $]\alpha, +\infty[$.

QUESTION 19 On pose $u_0 = 1$.

- Montrer que, pour tout n dans \mathbb{N} :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$$

et en déduire que, pour tout n dans \mathbb{N} :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

- Au vu de cette majoration, à partir de quel rang n est-on sûr que u_n représente une valeur approchée de α à 10^{-4} près ?

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \cos(x) - \sin(x)$.

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

On note J_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

QUESTION 20 Etudier, en fonction de la parité de n , les variations de f sur J_n .

QUESTION 21 Montrer que les points de (\mathcal{C}) d'abscisse x tels que $f'(x) = 0$ sont situés sur deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' dont on précisera les équations.

QUESTION 22 Construire la courbe (\mathcal{C}) pour $x \in [-2\pi, 2\pi]$ (échelle : $\pi = 2$ carreaux sur les axes).

QUESTION 23 Tracer les deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sur le même graphique et compléter l'allure de (\mathcal{C}) sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.

QUESTION 24 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans tout intervalle J_n une solution unique.

On note x_n cette solution, qu'on ne cherchera pas à calculer.

QUESTION 25 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ puis donner un équivalent de x_n quand $n \rightarrow +\infty$.

QUESTION 26 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

QUESTION 27 Montrer que $x_n = n\pi + \arctan(x_n)$.

QUESTION 28 En déduire que

$$x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \varepsilon_n$$

où ε_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, on rappelle que pour $x > 0$,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$