Devoir surveillé de Mathématiques – n° 4 –

durée: 2 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

Dans toute la suite le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ *est rapporté à un repère orthonormé direct* $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 1

On considère la courbe $\mathcal{L}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^3}{t^4+1} \\ y(t) = \dfrac{2t}{t^4+1} \end{cases}$$

Les points de cette courbe seront notés $M(t)$ en prenant t dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec la convention que $M(\infty)$ correspond à la limite de $x(t)$ et $y(t)$ en $+\infty$ ou $-\infty$.

QUESTION 1 Etudier la parité de $x(t)$, $y(t)$ et montrer que la courbe $\mathcal{L}$ admet une symétrie centrale par rapport à $O(0,0)$.

QUESTION 2 Montrer que $x(t) = y(\frac{1}{t})$ et montrer que la courbe $\mathcal{L}$ admet une symétrie par rapport à la droite d'équation $(y = x)$ et qu'ainsi on peut réduire l'étude de la courbe aux t de l'intervalle $[0,1]$.

QUESTION 3 Donner le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0,1]$.

QUESTION 4 Donner dans un tableau les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \left\{0; 1/2; 1/\sqrt[4]{3}; 1\right\}$.

QUESTION 5 Préciser la limite de $\dfrac{\overrightarrow{OM}(t)}{\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|}$ quand t tend vers $\pm\infty$ et préciser la tangente en $M(\infty)$.

QUESTION 6 Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{L}$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$. (Choisir la longueur unité assez grande , de l'ordre de 8 à 10 cm). On placera les points $M(0)$, $M(1/2)$, $M(1/\sqrt[4]{3})$, $M(1)$ ainsi que les tangentes en ces points. On donne $\sqrt[4]{3} \approx 1,3$ et $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \approx 0,76$.

On considère l'application f du plan privé de l'origine dans le plan qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point N de coordonnées (X, Y) avec

$$X = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad Y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

QUESTION 7 Déterminer l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \mid f(M) = M\right\}$.

QUESTION 8 Donner une représentation paramétrique $(X(t), Y(t))$ de l'image par f de $\mathcal{L} \setminus \{(0,0)\}$ (La courbe $\mathcal{L}$ privée de l'origine du repère).

QUESTION 9 Construire la courbe image.

Exercice 2

QUESTION 10 Etudier et tracer la courbe $\mathcal{P}$ d'équation polaire $r = \dfrac{1}{1-\cos\theta}$.

QUESTION 11 A tout point M de $\mathcal{P}$ on associe le point K projeté orthogonal de M sur l'axe $(O, \vec{i})$. On appelle N le symétrique de O par rapport à K et H le projeté orthogonal du point O sur la droite (MN). On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points H.

(a) Déterminer, en fonction de θ, les coordonnées du point H dans le repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

(b) Lorsque H est distinct de O, on pose φ une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OH}}\right)$. Calculer $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de θ.

(c) Montrer que l'équation polaire de l'ensemble $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est $r(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{1-\sin\varphi}$.

QUESTION 12 Etudier la courbe $\mathcal{E}$ d'équation polaire $r(\varphi) = \dfrac{\sin 2\varphi}{1-\sin\varphi}$ dans le repère $\mathcal{R}$. On étudiera en particulier, le signe de $r(\varphi)$, les branches infinies, les poits stationnaires s'ils existent.

QUESTION 13 Tracer la courbe $\mathcal{E}$ sur le même graphique que $\mathcal{P}$.