

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction. Si vous sautez les questions Cours-TD sans tenter d'y répondre vous seriez sanctionné.
Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

Cours TD

Exercice 1

QUESTION 1 Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n (en précisant la valeur de n):

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = 0\} \quad E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y \geq 0\}$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z + 1 = 0\} \quad E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xy = 0\}$$

QUESTION 2 Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs

$$V_1 = (0, 1, 2, 3), V_2 = (1, 2, 3, 4) \text{ et } V_3 = (2, 3, 4, 5).$$

Exercice 2

QUESTION 3 Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\text{rang}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\text{rang}(A) = 2$?

QUESTION 4 Résoudre suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ le système:

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3 \end{cases}$$

QUESTION 5 Calculer par la méthode de Gauss-Jordan l'inverse de la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Fin Cours TD

Problème 1

Dans tout le problème on considère l'équation différentielle:

$$(E_g) : y' - xy = g(x)$$

où g est une fonction, qui peut changer d'une question à l'autre, continue sur \mathbb{R} . On ne considère que les **solutions réelles** des équations différentielles.

QUESTION 6 Résoudre l'équation homogène (E_0) .

QUESTION 7 Montrer que si y_1 est solution de (E_{g_1}) et y_2 est solution de (E_{g_2}) alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $y_1 + \lambda y_2$ est solution de $(E_{g_1 + \lambda g_2})$.

QUESTION 8 Expliciter à l'aide d'une constante C et de $\int_0^x e^{-t^2/2} g(t) dt$, la solution générale de l'équation (E_g) .

QUESTION 9 Dans cette question $g : x \mapsto e^{x^2/2}$. Résoudre l'équation (E_g) .

QUESTION 10 Dans cette question $g : x \mapsto (1 + x^2)e^{x^2/2}$.

- Donner la solution générale de l'équation (E_g) .
- On désigne par f la solution de (E_g) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$, donner l'expression de f .

QUESTION 11 Dans cette question $g : x \mapsto (1 + x^2)e^{x^2}$.

- En posant $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$, déterminer une solution particulière puis donner la solution générale de l'équation (E_g) .
- A l'aide des questions précédentes calculer :

$$\int_0^x (1 + t^2)e^{t^2/2} dt.$$

QUESTION 12 Dans cette question, on considère l'équation différentielle homogène d'ordre 2:

$$(E) : y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

- (a) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $(g : x \mapsto f'(x) - xf(x))$ est solution de (E_0) .
- (b) Résoudre l'équation (E) .

QUESTION 13 Déterminer l'unique solution du système suivant :

$$\begin{cases} y''(x) - 2xy'(x) + (x^2 - 1)y(x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, & y'(0) = 1. \end{cases}$$

Problème 2

Soit α un nombre réel et f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
On note (E_α) l'équation différentielle suivante :

$$(E_\alpha) : y'' + \alpha y = f$$

On ne considère que les **solutions réelles** des équations différentielles.

QUESTION 14 On suppose dans cette question que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Si $\alpha = 0$, déterminer l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions du problème

$$\begin{cases} y'' = 0, \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 0 \end{cases}$$

- (b) On suppose que $\alpha = \omega^2$ ($\omega > 0$). Déterminer l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions du problème

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0, \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 0 \end{cases}$$

- (c) On suppose que $\alpha = -\omega^2$ ($\omega > 0$). Déterminer l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions du problème

$$\begin{cases} y'' - \omega^2 y = 0, \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 0 \end{cases}$$

QUESTION 15 On suppose dans cette question que $\alpha = 0$ et que f est continue sur \mathbb{R} . On note (E_0) l'équation différentielle suivante :

$$(E_0) : y'' = f$$

- (a) Montrer que l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (E_0) est

$$\mathcal{S} = \left\{ F : x \mapsto \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du + ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- (b) En déduire que le problème

$$\begin{cases} y'' = f, \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution notée F_1 .

Dans la suite du problème, on se propose de résoudre l'équation différentielle (E_1) dans le cas où f est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$(E_1) : y'' + y = f$$

QUESTION 16 Résoudre l'équation homogène associée à (E_1) .

QUESTION 17 On suppose dans cette question que $f(x) = \cos nx + \cos mx$, n et m étant deux entiers naturels **non nuls** donnés.

Résoudre (E_1) puis déterminer l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions du problème

$$\begin{cases} y'' + y = f(x), \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Dans la suite f est quelconque continue sur \mathbb{R} .

QUESTION 18 On définit la fonction h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

- (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \sin(x) \int_0^x f(t) \cos t dt - \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt.$$

- (b) Montrer que la fonction h est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et expliciter $h'(x)$ et $h''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- (c) En déduire que la fonction h est une solution particulière de (E_1) .
- (d) Déterminer l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} solutions de l'équation différentielle (E_1) .