Devoir surveillé de Mathématiques – n° 2 –

durée: 4 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation. Si vous sautez les questions Cours–TD sans tenter d'y répondre vous seriez sanctionné.
Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

Cours TD

Exercice 1

QUESTION 1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(f(x)) = x$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x.$$

Exercice 2

QUESTION 2 Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc}]-\pi/2, \pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$$

est bijective.

Sa réciroque est appelée fonction arc tangente et est usuellement notée arctan .

QUESTION 3 Calculer la dérivée de la fonction arctan et écrire son développement limité à l'ordre 5 en 0.

QUESTION 4 Montrer que arctan est une fonction impaire.

QUESTION 5 Préciser les valeurs de $\arctan(x)$ pour $x = 0$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = 1$ et $x = \sqrt{3}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x)$.

QUESTION 6 Réaliser une représentation graphique de arctan dans un repère orthonormé en prenant pour unité 2 cm.

Fin Cours TD

Problème

Les deux parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I: Etude d'une fonction

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\forall t \neq 0 : f(t) = \frac{\arctan t}{t} \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

QUESTION 7 Justifier que f est continue et paire.

QUESTION 8 Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0.

QUESTION 9 Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.

QUESTION 10 Justifier que f est dérivable en 0, donner $f'(0)$ ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente en 0.

QUESTION 11 A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* : \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} \mathrm{d}u = -\frac{1}{2} t^2 f'(t).$$

En déduire le sens de variation de f.

QUESTION 12 En déduire que $\forall t \in \mathbb{R} : 0 \leq f(t) \leq 1$.

QUESTION 13 Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm), (on ne demande pas l'étude des points d'inflexion).

Soit φ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \mathrm{d}t.$$

QUESTION 14 En remarquant que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 1$.

Ce qui permet le prolongement de φ par continuité en posant $\varphi(0) = 1$.

QUESTION 15 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$, (on pourra commencer par supposer $x > 0$).

QUESTION 16 Montrer que φ est paire, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \varphi'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - \varphi(x)\right).$$

QUESTION 17 (difficile) Montrer que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 0$.

QUESTION 18 En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}$.

QUESTION 19 Montrer que $\forall t \in [1, +\infty[: 0 \leq f(t) \leq \dfrac{\pi/2}{t}$ et en déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

QUESTION 20 Montrer alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$. (Indication: on pourra remarquer que $\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$).

QUESTION 21 Tracer la courbe représentative de φ dans le même repère que celle de f.

Partie II: Etude d'une fonction intégrale

QUESTION 22 On note g la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t + \arctan t$.

(a) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que 0 est l'unique solution de l'équation : $t + \arctan t = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $h(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t + \arctan t}$.

QUESTION 23 Etudier la parité de h.

QUESTION 24 Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $h'(x)$ pour $x > 0$. (Indication: considérer une primitive H de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t + \arctan t}$ puis remarquer que $h(x) = H(2x) - H(x)$)

QUESTION 25 Donner le sens de variation de h.

QUESTION 26 Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\left| h(x) - \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \leq \frac{\pi}{2}\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

QUESTION 27 En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ln 2$.

QUESTION 28 Déterminer deux réels a, b tels que

$$\forall t > 0 : \frac{1}{t + \arctan t} = \frac{a}{t} + bt + t\varepsilon(t)$$

avec ε continue sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} \varepsilon(t) = 0$.

QUESTION 29 Montrer, en utilisant la définition de la limite que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_x^{2x} t\varepsilon(t)\mathrm{d}t = 0.$$

QUESTION 30 En déduire que h admet au voisinage de 0 un développement à l'ordre 2 que l'on exprimera.

QUESTION 31 Montrer qu'on peut prolonger h par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable.
Exprimer alors les valeurs de $h(0)$ et de $h'(0)$.

QUESTION 32 Etudier, au voisinage de 0, la position relative de la courbe de h et de sa tangente en 0.

QUESTION 33 Déterminer le développement limité de h' en 0 à l'ordre 1.

QUESTION 34 En déduire que h est deux fois dérivable en 0, et calculer $h''(0)$.