

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

## Exercice 1

Dans tout l'exercice,  $\theta$  désigne un réel donné dans l'intervalle  $] -\pi, \pi[$ .

**QUESTION 1** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation:

$$z^2 - 2z(1 + \cos \theta) \cos \theta + (1 + \cos \theta)^2 = 0 \quad (1)$$

d'inconnue  $z$ .

**QUESTION 2** En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation:

$$Z^4 - 2Z^2(1 + \cos \theta) \cos \theta + (1 + \cos \theta)^2 = 0 \quad (2)$$

d'inconnue  $Z$ .

**QUESTION 3** On suppose dans cette question que  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et on note  $Z_1, Z_2, Z_3$  et  $Z_4$  les solutions de l'équation (2). Placer les quatres points d'affixes respectives  $Z_1, Z_2, Z_3$  et  $Z_4$  dans le plan, et montrer qu'ils sont les sommets d'un carré.

## Exercice 2

Soit l'application  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z + 1/z$ .

**QUESTION 4** Résoudre l'équation  $f(z) = 0$  et en déduire que  $f$  n'est pas injective.

**QUESTION 5** On suppose que  $z = e^{i\theta}$ .

(a) Calculer  $f(z)$  en fonction de  $\cos \theta$ .

(b) En déduire que l'image par  $f$  du cercle de centre 0 et de rayon 1 est le segment  $[-2, 2]$ .

**QUESTION 6** Soit  $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x - 1/x$ .

(a) Calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .

(b) Expliquer pourquoi  $h(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ .

(c) En déduire que  $f(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$ .

**QUESTION 7** Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , on a:

$$f(z) \in i\mathbb{R} \iff z \in i\mathbb{R}$$

et en déduire que  $f^{-1}(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$ .

## Exercice 3

Le plan euclidien étant muni d'un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives

$$z_A = -1 + i, z_B = 3 + 2i \text{ et } z_C = i\sqrt{2}.$$

**QUESTION 8** On considère l'application  $f$  du plan dans lui même qui à tout point  $M(z)$  associe  $M'(z')$  tel que

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \bar{z} - 1 + i(1 + \sqrt{2}).$$

(a) Montrer que  $f(A) = A$  et que  $f(C) = C$ . On déduit donc que  $f$  est la symétrie d'axe la droite  $(AC)$ .

(b) Placer les points  $A$  et  $B$  dans le plan, puis construire le point  $B' = f(B)$ .

**QUESTION 9** On considère l'application  $g$  du plan dans lui même qui à tout point  $M(z)$  associe  $M''(z'')$  tel que

$$z'' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i.$$

(a) Donner l'écriture complexe de l'homothétie  $h$  de centre  $A$  et de rapport  $\sqrt{2}$ .

(b) Montrer que  $g = f \circ h$ .

**QUESTION 10** Soit  $D$  le point d'affixe  $2 - 4i$  et  $D'' = g(D)$ .

Déterminer l'affixe du point  $D''$ , puis vérifier que le triangle  $ABD''$  est rectangle en  $A$ .