

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

## Exercice 1

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire usuel, on considère le plan ( $H$ ) d'équation ( $x + y = 0$ ).

**QUESTION 1** Donner un vecteur unitaire  $u_1$  orthogonal à  $H$  et une base orthornormée ( $u_2, u_3$ ) de  $H$ .

On note  $p$  la projection orthogonale sur  $H$  et  $s$  la symétrie orthogonale par rapport à  $H$ .

**QUESTION 2** Déterminer la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et déduire celle de  $s$ .

## Exercice 2

**QUESTION 3** Dans cette question on considère l'équation différentielle:

$$x^3 y' + (3x^2 - 2)y = 0 \quad (E_0)$$

- (a) Résoudre l'équation ( $E_0$ ), sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .  
 (b) Etudier l'équation ( $E_0$ ) sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

**QUESTION 4** Dans cette question on considère l'équation non homogène:

$$x^3 y' + (3x^2 - 2)y = x^3 \quad (E_1)$$

- (a) Si  $f$  est une solution de l'équation ( $E_1$ ) sur  $]0, +\infty[$ , Sans résoudre l'équation, calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $f' \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$ .  
 (b) Résoudre l'équation ( $E_1$ ), sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

## Problème 1

Dans tout le problème  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n, b, c \in \mathbb{R}$ . On note  $D_n(a_1, a_2, \dots, a_n, b, c)$  ou simplement  $D_n$  le déterminant d'ordre  $n$  suivant:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a_n \end{vmatrix}$$

$$\text{ainsi } D_1 = a_1, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{vmatrix} \text{ et } D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b & b \\ c & a_2 & b \\ c & c & a_3 \end{vmatrix}$$

### Partie I

Dans cette partie que  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ .

**QUESTION 5** Calculer  $D_1, D_2$  et  $D_3$ .

**QUESTION 6** Calculer  $D_n$  dans le cas  $a = c$  puis  $a = b$ .

**QUESTION 7** Calculer  $D_n$  dans le cas  $b = c$ .

**QUESTION 8** Dans cette question, on suppose  $b \neq c$  et  $n \geq 3$ .

- (a) Etablir que  $D_n - (2a - b - c)D_{n-1} + (a - b)(a - c)D_{n-2} = 0$ . (On pourra par exemple opérer avec les deux dernières colonnes puis faire la même manipulation sur les lignes).  
 (b) Résoudre l'équation  $x^2 - (2a - b - c)x + (a - b)(a - c) = 0$ . Puis déterminer l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  vérifiant la relation:

$$\forall n \geq 3 : u_n - (2a - b - c)u_{n-1} + (a - b)(a - c)u_{n-2} = 0.$$

- (c) En utilisant les valeurs de  $D_1$  et  $D_2$  donner l'expression de  $D_n$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .

## Partie II

Dans cette partie, on désire calculer le déterminant  $D_n$  dans le cas général.

**QUESTION 9** Dans un premier temps, on suppose que  $b \neq c$ . On pose  $D_n(x)$ , le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant  $x$  à tous les coefficients de  $D_n$ :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \cdots & b + x \\ c + x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ c + x & \cdots & c + x & a_n + x \end{vmatrix}.$$

(a) Montrer qu'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} : D_n(x) = \alpha x + \beta.$$

On ne demande pas dans cette question de préciser  $\alpha$  et  $\beta$ .

(b) Calculer  $\alpha$  et  $\beta$  en évaluant  $D_n(x)$  pour des valeurs judicieuses de  $x$ .

(c) En déduire l'expression de  $D_n = D_n(0)$ .

**QUESTION 10** Dans cette question, on suppose que  $b = c$ .

(a) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on pose

$$h(t) = D_n(a_1, a_2, \dots, a_n, b, b + t)$$

établir que  $h$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

(b) En déduire la valeur de  $D_n$ .

## Problème 2

Dans tout le problème  $f$  désigne la fonction définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt.$$

**QUESTION 11** Justifier que si  $x > 0$  et différent de 1 alors  $x$  et  $x^2$  sont d'un même coté de 1 sur la droite réelle.

**QUESTION 12** En déduire que  $D_f = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

**QUESTION 13** Calculer la dérivée  $f'(x)$  pour  $x \in D_f$ .

**QUESTION 14 Etude de  $f$  au voisinage de 0**

(a) Montrer que  $\forall x \in ]0, 1[ : 0 \leq f(x) \leq \frac{-x}{\ln x}$  et en déduire que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. On note encore  $f$  la fonction ainsi prolongée en 0, préciser  $f(0)$ .

(b) Montrer que  $f$  est dérivable à droite de 0 et donner  $f'(0)$ .

**QUESTION 15 Etude de  $f$  au voisinage de 1**

(a) Ecrire le développement limité de  $\ln x$  au voisinage de 1 à l'ordre 2.

(b) Justifier alors que  $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 1}(1)$ .

(c) Montrer qu'il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que

$$\forall x \in ]1 - \alpha, 1 + \alpha[ \setminus \{1\} : \left| \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right| \leq \frac{3}{2}$$

puis que

$$\forall x \in ]1 - \alpha, 1 + \alpha[ \setminus \{1\} : |f(x) - \ln(x+1)| \leq \frac{3}{2} |x^2 - x|$$

(d) En déduire la limite de  $f$  en 1. On prolonge  $f$  par continuité en 1, montrer qu'ainsi prolongée,  $f$  est dérivable en 1 et donner  $f'(1)$ .

**QUESTION 16 Calcul de l'intégrale  $J = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$**

(a) Justifier que l'intégrale  $J$  est bien définie.

(b) Montrer que pour tout couple  $(x, y) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[ :$

$$\int_{y^2}^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \int_y^x \frac{u}{\ln u} du$$

et en déduire que  $f(y) - f(x) = \int_x^y \frac{t-1}{\ln t} dt$ .

(c) En déduire la valeur de  $J$ .