

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.

Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

## Exercice 1

Soit le polynôme  $P(X) = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ .

**QUESTION 1** Vérifier que 2 est racine de  $P$ . Quelle est sa multiplicité?

**QUESTION 2** Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  puis dans  $\mathbb{C}[X]$ .

## Exercice 2

Dans cet exercice  $E$  désigne le  $\mathbb{R}$  – espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ . On note  $f$  l'application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto \frac{1}{2} (5x - y, 5y - x) \end{aligned}$$

**QUESTION 3** Montrer que  $f$  est linéaire.

**QUESTION 4** On note  $E_2 = \ker(f - 2Id_E)$  et  $E_3 = \ker(f - 3Id_E)$ .

- Déterminer une base de  $E_2$  puis une base de  $E_3$ .
- Montrer que  $E = E_1 \oplus E_2$ .
- Soit  $u = (1, 2)$ . Déterminer les vecteurs  $u_2 \in E_2$  et  $u_3 \in E_3$  tels que :  
 $u = u_2 + u_3$ .

En déduire, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'expression de  $f^n(u)$ .

## Exercice 3

Dans cet exercice  $E$  désigne le  $\mathbb{R}$  – espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ ,  $(e_1, e_2, e_3)$  désigne la base canonique de  $E$ . On note  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par:

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3 \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

**QUESTION 5** Déterminer  $\ker(f - Id_E)$  et en donner une base.

**QUESTION 6** Déterminer  $\ker(f^2 + Id_E)$  et en donner une base.

**QUESTION 7** Montrer que  $\ker(f - Id_E) \cap \ker(f^2 + Id_E) = \{0_E\}$ .

**QUESTION 8** En déduire que  $E = \ker(f - Id_E) \oplus \ker(f^2 + Id_E)$ .

## Exercice 4

Pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ , on considère le  $\mathbb{R}$  – espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_n[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , ainsi que le sous-ensemble de  $E$  :

$$H_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$$

**QUESTION 9** Montrer que  $H_n$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**QUESTION 10** On donne  $P_n = X^n - nX + 1$ . Montrer que le reste de la division euclidienne de  $P_n$  par  $P_2$  est un polynôme constant que l'on déterminera.

**QUESTION 11** Montrer que  $E = H_n \oplus \mathbb{R}_1[X]$ . En déduire la dimension de  $H_n$ . Quelle est la projection de  $P_n$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$  parallèlement à  $H_n$  ?

**QUESTION 12** Dans cette question, on suppose  $n = 3$ .

- Ecrire  $P_3$  comme somme d'un élément de  $H_3$  et d'un élément de  $\mathbb{R}_1[X]$ .
- Montrer que la famille  $(X(X-1)^2, (X-1)^3)$  est une base de  $H_3$ .
- En utilisant les deux questions précédentes, calculer les coordonnées de  $P_3$  dans la base  $(1, X, X(X-1)^2, (X-1)^3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ .