Devoir surveillé de Mathématiques – n° : 5 –

durée: 4 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

Cours TD

Exercice 1

QUESTION 1 On note $F(X)$ la fraction:

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)^2\,(X-2)^3}$$

Donner la décomposition en éléments simples de F et en déduire deux polynômes P et Q tels que:

$$(X-1)^2\,P + (X-2)^3\,Q = 1 \quad \text{avec} \quad \deg(P) < 3 \ \text{ et } \ \deg(Q) < 2\,.$$

Exercice 2

On note f l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x-y, y-2x, x+2y) \end{array}$$

QUESTION 2 Montrer que f est linéaire.

QUESTION 3 Montrer que f est injective.

QUESTION 4 Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un plan dont on donnera une équation.

QUESTION 5 Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Problème 1

On considère les ensembles F et G suivants:

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \text{ et } z = 0\right\}$$

QUESTION 6 Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

QUESTION 7 Donner une base de F et une base G .

QUESTION 8 Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

QUESTION 9 Soit p la projection sur F parallélement à G . Donner pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ l'expression de $p(u)$ en fonction de x, y et z .

QUESTION 10 Soit q l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$\begin{array}{rcl} q : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-x-2y, x+2y, z) \end{array}$$

Montrer que q est un projecteur.

QUESTION 11 Montrer que $\mathrm{Im}(q) = F$.

QUESTION 12 En déduire que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

QUESTION 13 On pose $r = p + q$. Est ce que r est un projecteur ?

QUESTION 14 Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, calculer r^n en fonction de n et r .

QUESTION 15 On note $Id_{\mathbb{R}^3}$ l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Montrer que:

(a) $\operatorname{Im}\left(r - 2Id_{\mathbb{R}^3}\right) \subset \ker(r)$.

(b) $\operatorname{Im}(r) \subset \ker\left(r - 2Id_{\mathbb{R}^3}\right)$.

QUESTION 16 Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker\left(r - 2Id_{\mathbb{R}^3}\right) \oplus \ker(r)$.

Problème 2

Dans tout le problème $\mathbf{E}$ désigne le $\mathbb{R}-$ *espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$. On note

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0) \quad \text{et} \quad e_3 = (0,0,1)$$

et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, définie par:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -2e_1 - 2e_2 \\ f(e_2) &= \ \ 6e_1 + 5e_2 \\ f(e_3) &= \ \ 3e_1 + 2e_2 + \alpha e_3 \end{aligned}$$

QUESTION 17 Pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on note

$$f\left((x_1, x_2, x_3)\right) = \left(x_1', x_2', x_3'\right).$$

Donner l'expression de $\left(x_1', x_2', x_3'\right)$ en fonction de (x_1, x_2, x_3) .

QUESTION 18 Dans cette question on suppose $\alpha = 0$.

(a) Déterminer $\ker(f)$ et en donner une base.

(b) Justifier que $\operatorname{Im}(f) \subset vect(e_1, e_2)$.

(c) Calculer $f(e_1 + e_3)$ et $f(-3e_1 - e_2)$ puis déduire $\operatorname{Im}(f)$.

(d) Montrer alors que $\mathbf{E} = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

QUESTION 19 Dans cette question on suppose $\alpha = 1$. On pose

$$g = (f - Id_{\mathbf{E}}) \quad \text{et} \quad h = (f - 2Id_{\mathbf{E}}).$$

(a) Montrer que g est un projecteur et que $\operatorname{Im}(g) = \ker(h)$.

(b) En déduire que $(f - Id_{\mathbf{E}})(f - 2Id_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$.

(c) Montrer alors que $\mathbf{E} = \ker(f - Id_{\mathbf{E}}) \oplus \ker(f - 2Id_{\mathbf{E}})$.

(d) Montrer que dans ce cas f est bijective et donner f^{-1} en fonction de f et $Id_{\mathbf{E}}$.

QUESTION 20 Dans cette question on suppose $\alpha = 2$. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle on a:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= u_1 \\ f(u_2) &= 2u_2 \\ f(u_3) &= u_2 + 2u_3 \end{aligned}$$

Dans toute la suite, on suppose $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1; 2\}$

QUESTION 21 Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} en calculant $f^{-1}(e_1)$, $f^{-1}(e_2)$ et $f^{-1}(e_3)$.

QUESTION 22 On note $\mathcal{P}$ le plan engendré par (e_1, e_2) . Montrer que

$$f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}.$$

QUESTION 23 Déterminer un vecteur $v \in \mathbf{E}$ non nul, tel que $f(v) = \alpha v$.

QUESTION 24 On note $\mathcal{D}$ la droite engendré par le vecteur v. Montrer que

$$\mathbf{E} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}.$$

Fin