

*Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédaction.*

*Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.*

## Cours TD

### Exercice 1

Soient  $A$  et  $B$  deux sous groupes d'un groupe  $(G, \cdot)$ .

**QUESTION 1** Montrer que  $A \cup B$  est un sous groupe de  $G$  ssi  $A \subset B$  ou  $B \subset A$ .

**QUESTION 2** On note  $AB$  l'ensemble  $\{a \cdot b \mid (a, b) \in A \times B\} \subset G$ , montrer que  $AB$  est un sous groupe de  $G$  ssi  $AB = BA$ .

**QUESTION 3** Dans cette question,  $G$  est le groupe additif  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $A = 2\mathbb{Z}$  et  $B = 3\mathbb{Z}$ . Expliquer pourquoi ici  $AB$  est un sous groupe de  $G$  est déterminer  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $AB = n\mathbb{Z}$ .

### Exercice 2

On suppose que  $(G, \cdot)$  est un groupe abélien, on note  $T$  l'ensemble de tous les éléments de  $G$  d'ordre fini.

**QUESTION 4** Rappeler la définition de l'ordre d'un élément dans  $G$ .

**QUESTION 5** Montrer que  $T$  est un sous groupe de  $G$ .

### Exercice 3

On note  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ . Montrer que  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  est sous corps de  $\mathbb{R}$ .

### Problème

Pour tout  $a \neq 0$ , on considère la suite de nombres réels  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$$

### Préliminaire

**QUESTION 6** Etudier les variations de la fonction

$$f : x \mapsto x + x^2$$

et tracer son graphe ainsi que la droite  $(y = x)$  dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

**QUESTION 7** Résoudre l'équation  $f(x) = x$  et préciser les points d'intersection de la courbe de  $f$  avec la droite  $(y = x)$ .

### Partie I

Dans cette partie on suppose que  $a \in ]-1, 0[$ .

**QUESTION 8** Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est croissante.

**QUESTION 9** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in ]-1, 0[$ .

**QUESTION 10** En déduire que  $(u_n)_n$  est convergente et préciser sa limite.

**QUESTION 11** Dans cette question, on note  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{u_n}.$$

(a) Vérifier que  $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{1 + u_n}$  et en déduire la valeur de la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n)$ .

(b) En admettant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n)$  déterminer un réel  $k$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{k}{n}$ .

## Partie II

Dans cette partie on suppose que  $a \in ]0, +\infty[$ .

**QUESTION 12** Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est strictement positive et croissante.

**QUESTION 13** Montrer alors que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = +\infty$ .

Dans toute la suite, on définit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$$

**QUESTION 14** Prouver que  $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$ .

**QUESTION 15** En déduire que la suite  $(v_n)_n$  est strictement croissante.

**QUESTION 16** En utilisant le fait que la suite  $(u_n)_n$  est strictement croissante et la **QUESTION 14**, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < v_n - v_0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$$

**QUESTION 17** Conclure que la suite  $(v_n)_n$  est convergente. On notera  $\alpha$  la limite de  $(v_n)_n$ .

**QUESTION 18** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq e^{\alpha 2^n}$ .

**QUESTION 19** En utilisant le fait que la suite  $(u_n)_n$  est strictement croissante et la **QUESTION 14**, montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : v_{n+p} - v_p \leq \frac{1}{2^p} \ln\left(1 + \frac{1}{u_p}\right)$$

**QUESTION 20** En passant à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  dans l'inégalité précédente montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : e^{\alpha 2^n} \leq 1 + u_n$$

**QUESTION 21** En déduire que  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{\alpha 2^n}$ .

**QUESTION 22** On pose :  $w_n = e^{\alpha 2^n} - u_n$ .

(a) Montrer que la suite  $(w_n)_n$  est bornée.

(b) Montrer que la suite  $(w_n)_n$  vérifie la relation :

$$2w_n - 1 = (w_{n+1} + w_n^2 - w_n) e^{-\alpha 2^n}$$

(c) Prouver enfin que lorsque  $n$  tend vers l'infini :  $u_n = -\frac{1}{2} + e^{\alpha 2^n} + o(1)$ .

## Partie III

**QUESTION 23** Etudier le cas  $a \in ]-\infty, -1]$ .