Devoir surveillé de Mathématiques – n° : 3 –

durée: 2 heures

Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, de la précision des raisonnements ainsi que la clarté de la rédation.

Les calculatrices de toute sorte ne sont pas autorisées.

Avez vous révisé vos TD ?

QUESTION 1
Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N} : 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

QUESTION 2
Résoudre en entiers relatifs l'équation suivante :

$$11x + 17y = 5.$$

QUESTION 3
Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + 2n - 8$ soit divisible par 11.

QUESTION 4
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f'(x_0) = 0$ alors f présente un minimum global en x_0.

Exercice 1

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante:

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

QUESTION 5
Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.

QUESTION 6
En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $[0, +\infty[$, montrer que f atteint un minimum sur $[0, +\infty[$ que l'on déterminera.

QUESTION 7
En déduire l'inégalité suivante:

$$(1 + x)^n \leqslant 2^{n-1}(1 + x^n), \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

QUESTION 8
Montrer que si $x, y \in [0, +\infty[$ alors on a

$$(x + y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

QUESTION 9
Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.

QUESTION 10
Calculer $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et étudier l'existence de $f''(0)$.

QUESTION 11
Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

QUESTION 12
Dresser le tableau de variations et tracer l'allure de la courbe de f dans repère orthonormé (unité 2 cm).

QUESTION 13
On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

où P_n est une foncton polynôme.

(a) Trouver P_1 et P_2.

(b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

QUESTION 14
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Fin